

# مسألة الإنهاية في الرياضيات

نظرية جورج كانتور

تأليف

د. عبد اللطيف يوسف الصديقي









مسألة الانهائية  
في الرياضيات  
نظرية جورج كانتور







المركز الإسلامي الثقافي  
مكتبة سماحة آية الله العظمى  
السيد محمد حسين فضل الله العامة  
الرقم ..... 231

5568m

# مسألة الانهائية في الرياضيات نظرية جورج كانتور

تأليف  
د. عبد اللطيف يوسف الصديقي



1999



● مسألة اللانهاية في الرياضيات (نظرية جورج كانتور) .

● د. عبد اللطيف يوسف الصديقي .

● الطبعة العربية الأولى : الإصدار الأول 1999 .

● رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية : 1998/8/1257 .

---

ردمك 1- 038 - 00 - 9957 ISBN

---

● جميع الحقوق محفوظة © .



دار الشروق للنشر والتوزيع

هاتف : 4618190 / 4618191 / 4624321 فاكس : 4610065

ص.ب. 926463 الرمز البريدي : 11110 عمان - الأردن

■ التوزيع في فلسطين :

دار الشروق للنشر والتوزيع

رام الله - النارة - الشارع الرئيسي

جميع الحقوق محفوظة، لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو تخزينه في نطاق استعادة المعلومات أو نقله أو إستتساخه بأي شكل من الأشكال دون إذن خطي مسبق من الناشر.

**All rights reserved.** No Part of this book may be reproduced, or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without the prior permission in writing of the publisher.

---

■ التنضيد والاخراج الداخلي وتصميم الغلاف وفرز الألوان و الأفلام :

الشروق للدعاية والإعلان والتسويق / قسم الخدمات المطبعية

هاتف : 4618190/1 فاكس 4610065 / ص.ب. 926463 عمان (11110) الأردن

تاريخ الصدور: كانون الثاني / يناير 1999

طبع في مطابع الارز ٣٦١٠٠١١





## توطئة

"الحياة ممتعة لشينين فقط، الاكتشاف في الرياضيات وتعليم الرياضيات"<sup>1</sup>

سيمون بوانسو S. Poisson

تبدو اللاهائية عند عامة الناس أنها شيء ضخم للغاية وغير محدد، ومن ثم لا يمكن معرفتها أو إدراكها، وبصورة أخرى تعني شيئاً كبيراً جداً خارج نطاق العد نفسه، وقد تساوي عدد نجوم الكون كله أو عدد حبات الرمل الموجودة على سواحل البحار.

وفي الواقع لا نصادف اللاهائية وجها لوجه ولكن وجود كون أو عالم لانهائي أمر حتمي، والدليل على ذلك هو تصورنا للفكرة نفسها كما هو الحال في العلوم الرياضية التي تمثل انعكاساً للواقع. غالباً ما نصادف اللاهائية في هذه العلوم بالرمز المعقوف ( $\infty$ ) أو ما يطلق عليه عادة "بعقدة الحب" والحقيقة وراء هذا الرمز هو الدوران المستمر حول المنحى. وهذا مما دفع علماء الرياضيات منذ قرون عديدة في محاولة فهم سحر اللاهائية وغموض ماهيتها جاهدين للتوصل إلى قياسها ومعرفة قوانينها والقواعد التي تحكمها كي تقف في صف المفاهيم الرياضية الأخرى.

---

<sup>1</sup> ترجمة كاتب هذه السطور



لقد كانت فكرة اللاهائية مصدر قلق وإرباك أكثر من ألفي عام، فالليونانيون القدماء مثلاً أبدوا محاولاتهم للتعرف عليها والوصول إلى ماهيتها ولكنهم لم يتوصلوا إلى نتائج مرضية بسبب التناقضات التي تفرزها تلك الفكرة وتداخلها في المجالات الدينية والفلسفية.

ورغم ما أحرزه الإغريق من تقدم يثنى عليه، فإن الفكرة لم تبطل تماماً إلا في القرن التاسع عشر وبالذات في أعمال بلزانو وفيرشتراس و كانتور والأخير هو محطتنا ولب حديثنا .

وفي هذا الصدد عبر أستاذنا الكبير المرحوم الدكتور علي مصطفى مشرفة أجهل تعبير عن اللاهائية عندما كتب في مقال نشر في الجمع المصري للثقافة العلمية عام 1933 "اللاهائية كلمة تعبر عن معناها تعبيراً حرفياً دون حاجة من جانبي أو جانب شخص آخر إلى تفسير. ف " لا" النافية. ونهاية حد أو آخر أو طرف. وإذن ما لا حد له أو ما لا آخر أو طرف له. فيقال لشيء أنه لا نهائي إذا لم يوجد له حد أو نهاية. وعكسه الشيء المنتهي أو المحدد. فاللاهائية تعني الشيء الذي لا يحده شيء، أي بلا حدود وهي ليست بعدد صحيح وإنما هي كمية أو مقدار عن حالة غير منتهية.

ويبقى هذا التعريف في حيز المفاهيم التقليدية الذي يعبر عن اللاهائية بصورتها الممكنة أو الجهدية *potential Infinite*، بينما يبقى الأمر في صورتها الحقيقية أو الفعلية *Actual Infinite* وهي الإضافة التي تقدم بها كانتور ، كما سنرى شرح كل منهما من خلال هذه الصفحات .

والسؤال ههنا، ما هو حجم اللاهائية ؟ كان هذا السؤال مطروحا أمام كانتور قبل أن يخوض مسألة اللاهائية من كلا



طرفيها\*، تلك المسألة التي حيرت عقول سلفه ومعاصريه مما دفعت الرياضي الكبير جوزيف لاكرانج J.Lagrange (رئيس قسم الرياضيات- أكاديمية برلين للعلوم) في عام 1784 أن يعلن عن منح جائزة لمن يجد حلاً لهذه المعضلة- بناءً على اقتراح الأكاديمية- وأخيراً جاءت حلول كثيرة في غاية التعقيد الرياضي ولكن من بين تلك الحلول هناك حل بسيط جداً تقدم به الرياضي السويسري سيمون لوهليز Simon Lhuillier الذي فاز بالجائزة، و الحل هو: "اللاهائية هي الهاوية التي تتداخل فيها أفكارنا " \*

والحل الجذري هو الذي نحن بصددده و ما ترمي إليه هذه الصفحات وهو الذي أتى به جورج كانتور، الرياضي الذي هدب فكرة اللاهائية تهذيباً رائعاً مقدماً الحل النهائي بعدما كانت اللاهائية عائمة في محيط المطلق واللامحدود، وأعاد اعتبار فكرة اللاهائية الحقيقية التي نبذها سلفه، وهي اللاهائية الكاملة أو التامة وليست الممكنة أو الجهدية كما كان يتصورها الأوائل .

برهن كانتور على وجود مستويات مختلفة من اللاهائيات، بمعنى آخر، هناك رتب ودرجات من اللاهائيات كل مستوى يكون أكبر من سابقه وهكذا نحصل على رتب لانهائية من اللاهائيات وإن جميع المجموعات اللاهائية ليس لها نفس المقدار، وإنه يمكن مقارنة الواحدة مع الأخرى. فمثلاً مجموعة نقاط الخط المستقيم و مجموعة الكسور كلتاهما لانهائيتان. وبرهن أيضاً على أن المجموعة الأولى أكبر حجماً و مقداراً من الأخرى .

---

\* اللاهائية في الكبير و اللاهائية في الصغر إلا أن كانتور ركز جهوده ودراساته على اللاهائية في الكبير فقط و هذه تعتبر ثغرة في النظرية كما يراها كاتب هذه السطور.

\* Kline ,p. 149-150



ومن هذا المنطلق شن معاصرو كانتور حرباً ضده، فمنهم من اتهمه بالجنون وآخر بالشعوذة الخ من التهم، فالرياضي الفرنسي الشهير هنري بوانكاريه H.Poincare شجب نظرية الأعداد اللانهائية بعنف حين قال: بأنه مرض خطير جاء به كانتور وتأزمت به الرياضيات، لذا يجب التخلص منه تماماً". وقال آخر "إن كانتور كما لو كان يبني قصراً من الرمل بنظريته هذا"، أما أستاذه ليولد كرونكر L.Kroneker وأحد مشاهير الرياضيات آنذاك فقد شن عليه هجوما قاسيا متهما إياه بالدجل والشعوذة وإن أعماله الرياضية ليست إلا فلسفة فارغة وجوفاء وليس العلم الرياضي بحاجة إليها إطلاقاً". وكانت نتيجة هذا الهجوم الشخصي الدفين الذي تتستر وراءه الغيرة والحسد هلاك كانتور بعد إصابته بانهايار عصبي حاد قاده إلى مستشفى الأمراض العقلية الذي مكث فيه أكثر من ثمانية أعوام حتى وفاته. بينما يقول الرياضي هلمرت "لقد خلق لنا كانتور فردوسا وليس باستطاعة أحد أن يخرجنا منه".

ويعزو حرصنا لكانتور إلى وجود مفهوم اللانهائية في الرياضيات وسيادتها بجانب الكينونات الرياضية الأخرى، حيث لا يمكن دراستها أي اللانهائية بصورة مستقلة فحسب بل مجتمعة مع بعضها على هيئة فئات أو مجموعات وإن عناصر تلك المجموعات غالباً ما تكون لانهائية، لذا حتم على الرياضيين الاستسلام لطبيعة اللانهائية وعمق تأثيرها في العلم الرياضي وفي العلوم الأخرى.

لقد حاولنا في هذه الدراسة البسيطة إيجاز حياة كانتور وأعماله، ولخصنا نظريته حول اللانهائية وتبعنا مسارها التاريخي وكيف توصل كانتور إلى فكرة اللانهائية وبالذات اللانهائية الحقيقية ومن ثم كيف



هذب اللاهائية تهذبا رياضيا بعدما كانت عائمة في برائن الميتافيزيقيا، ومن ثم أصبحت كينونة مستقلة يمكن استيعابها وتطبيقها قدر الإمكان.

وجورج كانتور هو مؤسس نظرية اللاهائيات في الرياضيات ويمكن أن يقال بحق مؤسس الرياضيات الحديثة حيث كان شغله الشاغل هو إنجاز مفهوم المجموعة باعتبارها إحدى ركائز الرياضيات الأساسية وجعل نظرية الأعداد الموغلة ( ما وراء المنتهي) وبالذات مفهوم الأعداد الترتيبية لب أعماله .

والهدف الأساسي الذي قادنا إلى كتابة موضوع شائك كهذا هو افتقار المكتبة العربية إلى دراسة حول فكرة اللاهائية، وليس لدينا أي دليل يبرر هذا الافتقار، إلا أننا وجدنا أنه من الضروري تعريف القارئ والباحث على السواء بأهمية دور اللاهائية ليس في الرياضيات فحسب بل في شتى مجالات الحياة، لأن العلم الرياضي في حد ذاته ليس إلا علم اللاهائيات، ودورنا أيضا هو لفت انتباه الباحث الذي غابت عنه فكرة اللاهائية واعتبرها مجرد رمز خال من كل معنى .

لقد قسمنا الدراسة إلى فصول صغيرة جدا بحيث يمكن قرائتها بسهولة دون عناء التفاصيل التي غالبا ما يتحاشاها الرياضي، فكانت فصولا موجزة عن فكرة اللاهائية، أولها كان، التطور التاريخي لفكرة اللاهائية وهو يمثل مرحلة ما قبل الكانتورية، حيث ناقشنا فيه الأفكار الأساسية التي دفعت كانتور للتوصل إلى فكرة الأعداد الموغلة أو ما بعد المنتهي .



ثم تطرقنا إلى الأساليب الرياضية التي تميزت به نظريته وصولاً إلى الحلول الممكنة والجذرية في نظرنا التي قدمها بجرأة وحماس كي يثبت كل الأسس المنطقية والرياضية لتصبح مدخلا خلايا لكل فرع من فروع الرياضيات، وختمنا دراستنا ببعض المفارقات التي أفرزتها النظرية التي دون شك حتمية نتيجة عمق جذورها وسعة افقها، وأضفنا إلى هذا الفصل موجزا عن نظرية التحليل اللامعياري (اللاقياسي) الذي تقدم به الرياضي الأمريكي روبنسون. هذا التحليل الذي يمثل اللاهائيات في الصغر وهو الجزء الذي أهمله أو تجاهله كانتور، وما إضافتنا إلى التحليل اللامعياري إلا سد ثغرة تركتها الكانتورية بدافع غير أكاديمي.

و أخيرا أتوجه بالشكر والعرفان إلى جميع من كان له العون في إعداد هذه الدراسة مما أتاح لي صفاء الوقت وسعته، أذكر بالأخص فضيلة الوالد والوالدة و إلى زوجتي وأبنائي محمود وسارة ويوسف فلهم خالص التقدير والثناء وأتوجه أيضا إلى الأخ الفاضل الدكتور علي المدني على ما قام به من مراجعة مسودة هذا العمل وما قدمه من اقتراحات لغوية كان لها الأثر في تطوير حسي اللغوي، فله خالص الشناء و التقدير ...

البحرين ، مايو 1998



# الفصل الأول

- 1- تقديم
- 2- موجز حياة كانتور
- 3- خصوم كانتور







## تقديم

"إن تعريف اللاهائية هو لانهائي في التعقيد لأن اللاهائية ذاتها متضمنة في التعريف نفسه:" \*

برتراند رسل

عندما تتناول أي كتاب دراسي، سواء كان في الجبر أو في التحليل الرياضي أو في التبولوجيا أو في أي فرع آخر من فروع الرياضيات، فستجده يتضمن فصلاً أو قسماً خاصاً عن نظرية المجموعات ( المجاميع ) Set Theory أو كما يطلق عليها بالألمانية Mengenlehre. وهذا يدل على أن هذه النظرية تكمن في قاع جميع فروع الرياضيات بمثابة الأسس التي ينطلق منها هذا الفرع أو ذاك، بالإضافة إلى استقلالها المطلق باعتبارها فرعاً من فروع الرياضيات الذي يطلق عليه "نظرية المجموعات". ووجود هذه النظرية في تلك الفروع إلى أهميتها النظرية والتطبيقية معاً، وأن تقدم هذه النظرية يعد أحد الإنجازات التي توجت الرياضيات المعاصرة .

والغريب في الأمر أن هذا الفرع هو ابتكار شخص واحد تدين له الرياضيات الحديثة وفلسفتها وتعتران به لأنه فتح آفاقاً جديدة أمام

---

\*ترجمة كاتب هذه السطور



الرياضيين وفك الرموز العvisية وهذب فكرة الالانائية بعدما كانت عائمة في محيط اللامتعين واللامحدود وباتت مكتملة حتى ألفها الرياضيون أنفسهم وفلاسفة العلم أيضاً، الرجل صاحب هذا الابتكار هو جورج كانتور.

وكما كانت الفيشاغورية تنظر إلى أن "كل شيء هو عدد" أو يمكن التعبير عنه بذلك، والعدد هو جوهر الوجود وحقائقه "هناك صفة عامة في كل شيء جسماً أو غير جسم له صفة العددية أو بعبارة أخرى لا يمتاز شيء عن شيء إلا بالعدد، فالعدد هو جوهر الوجود وحقائقه "أما أصحاب نظرية المجموعات فقد رفعوا شعاراً آخر لهم هو أن "كل شيء هو مجموعة" أو يمكن تمثيله بمجموعة .

وبما أن وجود الالانائية الحقيقية Actual أجبر العلماء على إعادة دراسة الوضع الفيشاغوري فإن وجود الالانائية المطلقة Absolute هو الآخر دفع الرياضيين إلى إعادة الصرح الكانتوري، وعلى ضوء ذلك تمت دراسة المجموعات الالانائية وبالأخص الالانائية في الكبر أو كما يطلق عليها بالمصطلح الكانتوري "الأعداد الموغلة" Transfinite Numbers أو ما وراء المنتهى.

لقد عبر كانتور بنفسه عن تلك الأعداد مصرحاً أنه "ليس بمقدور أحد أن يقول إن الأعداد الموغلة تقف عند حد معين، أو تكمن مع الأعداد الصماء (غير المنطقة) الالانائية رغم أن جوهرها



واحد، إلا أن الأولى - الأعداد الموهلة - تعتبر بمثابة الأساس أو التصحيح السليم الذي يقودنا إلى اللاهائية الحقيقية<sup>1</sup>.  
فموضوع نظرية المجموعات إذن وبالأخص المجموعات اللاهائية التي انطلق منها كانتور في الفترة من 1874-1895 أثار جدلاً وصراعاً فكرياً لاتزال آثاره باقية حتى يومنا هذا . وبيت القصيد في هذا كله هو الانقلاب الذي أحدثته النظرية على بعض المبادئ الرياضية الكلاسيكية.

فالصعوبات الفيشاغورية مثلاً حول الجذر التربيعي للعدد اثنين ومفارقات زينو Zeno حول مفهومي "الاستمرارية" (الاتصال) والتقسيم اللاهائي هي جوهر هذا البحث ولب الموضوع . ونتيجة هذا الصراع أولى الرياضيون اهتماماً بالفلسفة أدّى إلى البحث العميق لدراسة الأسس الرياضية قاصدين من وراء ذلك إيجاد الحلول الممكنة لتلك المعضلات التي شطرتهم إلى عدة أقسام أدت بالتالي إلى ظهور مذاهب فلسفية داخل إطار الفكر الرياضي نفسه .

ومن خلال دراستنا للأفكار المستخدمة في التحليل الرياضي، ومدى فعاليتها ورغم امتداد جذور هذا الخلاف إلى القرون الوسطى بل وربما إلى عصر الإغريق، إلا أن فروع هذا النزاع غدا مقبولا من قبل بعض الرياضيين باعتباره قضية الخروج على القواعد المألوفة.

---

<sup>1</sup> Rucker p.69



و رغم ما أحرزت نظرية كانتور حول اللانهائية من تقدم ملموس في جميع حقول المعرفة إلا أنها في واقع الأمر أشد معركة عرفها تاريخ العلم من خلال الفكر التقليدي الرياضي حيث شبهها العالم الكبير ألبرت آينشتاين ذات مرة "بمشادة الضفدعة و الفأر". وفي عام 1831 عبر جاوس Gauss عن مخاوفه حول اللانهائية الحقيقية قائلاً "إنني أف بشفة إزاء المقدار أو الكمية اللانهائية كشيء متكامل أو تام والذي يعتبر شيئاً غير مقبول أو مسموحاً به في الرياضيات. فاللانهائية تعبير عن أسلوب في التحدث بالمعنى الحقيقي وهي نهاية لأي نسب محددة تؤول إلى الاقتراب بينما الأخرى تكون في تزايد دون أي قيود أو شروط ...<sup>2</sup>".

فإذا كانت  $(x)$  عدداً حقيقياً ما، فإن الكسر  $1/x$  يتضاءل بزيادة قيمة  $x$ ، ومن ثم يمكن إيجاد قيمة له حيث أن الكسر نفسه يختلف عن الصفر - أي كمية موجبة صغيرة جداً - وكلمة استمرت  $x$  في الزيادة فإن الفرق يظل أصغر من أية كمية موجبة مهما كانت قيمتها في الصغر و يقال إذن بأن الصفر هو نهاية الكسر أو المقدار  $1/x$  وذلك عندما يؤل  $x$  إلى اللانهائية ( بالرموز  $\lim 1/x = 0$  ) وكذلك فالدالة  $f(x) = 1/x$  .  $\lim 1/x = \infty$  لقيمة موجبة تكون في ازدياد كلما صغرت  $x$  .

---

<sup>2</sup> Khine, M.



وبناء على ذلك فإنه يمكن تعريف الكميات المتناهية في الكبر وكذلك المتناهية في الصغر بالآتي:

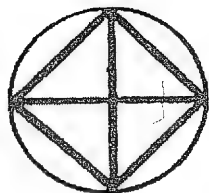
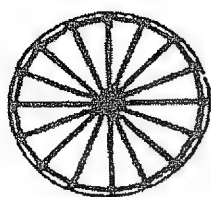
يقال للكمية المتغيرة التي تزداد قيمتها المطلقة بلا حدود بأنها كمية متناهية في الكبر . أما الكمية التي تكون نهايتها مساوية للصفر تسمى كمية متناهية في الصغر.

أما في الهندسة فاللانهاية هي "موقع" فمثلا يقال إن الخطين المتوازيين يتقاطعان في نقطة في اللانهاية وكذلك المستويات المتوازية تتقاطع أو تلتقي عند خط في اللانهاية وخط المقارب Asymptote يلتقي أيضاً عند اللانهاية وهكذا ، أما فكرة اللانهاية باعتبارها محلاً أو موقعاً فقد أدخلها الرياضي الفلكي جوهان كبلر J.Kepler و هو الذي أشار إلى أن القطع الزائد Parabola يمكن اعتباره شكلاً اهليجياً Ellipse أو قطعاً ناقصاً Hyperbola ببؤرة واحدة عند اللانهاية. ولكن الفكرة طورت فيما بعد من قبل دسارجيس Girard Desargues عند صياغته للهندسة الوصفية التي تفترض نقاطاً خيالية في اللانهاية .

لقد كان التصور الهندسي في فكرة اللانهاية عند الاغريق الأوائل عبارة عن العلاقة بين شكلي الدائرة والمضلع، فالدائرة ناتجة عن مضلع Polygon ذي أضلاع لانهاية ، أي كلما كثرت أو زاد عدد أضلاع المضلع أقترب من الشكل الدائري وعند حد معين من



الأضلاع المتعددة ، تنطبق الدائرة على المضلع ، أى يصبح المضلع ذا الأضلاع اللاهائية دائرة ( أنظر الشكل أدناه) .



ردا على مخاوف جاوس يقول كانتور: "رغم الاختلاف الجوهرى بين اللاهائية الممكنة (الجهدية) واللاهائية الحقيقية (الفعلية) فإن الأولى تعني ذلك التغير الذي يكون في تزايد دائم ويتجاوز جميع حدود النهايات ( مثل العدد الحقيقي الذي أشرنا إليه سابقا) بينما الأخرى هي كمية ثابتة محددة تكمن وراء جميع الكميات المحددة...<sup>3</sup>".

وبإيجاز يمكن اعتبار اللاهائية الممكنة بأنها خطوات لامتناهية، أي دون وجود حد معين نقف عنده، بينما اللاهائية الحقيقية هي مجموعة لانهائية متكاملة .

<sup>3</sup> Khine, M.



و يعلن كانتور أيضا عن سوء استخدام اللاهائية في الرياضيات التي غالبا ما تحير وتربك حتى الرياضيين أنفسهم و هذا ما حدث بالفعل لجاوس وآخرين ممن وجهوا التهم إلى كانتور ودحضوا شرعية اللاهائية الحقيقية واعتبروها قسرا لطبيعة الأشياء، فهي أي اللاهائية الحقيقية لا تبرز لنا كلية بأنها كاملة و لكن تؤخذ كما هي .

## I- موجز حياة جورج كانتور:

جورج فردينارد لودفيج فيلب كانتور Georg Cantor هو الابن البكر لأب تاجر ناجح هو جورج فالدمار كانتور Georg Waldmar Cantor من مواليد كوبنهاغن ( الدانمارك ) هاجر إلى سانت بيترسبيرج St.Petersburg (روسيا لينينغراد سابقا- عصر الإمبراطورية السوفيتية) و فيها ولد كانتور في الثالث من مارس عام 1845 و لكن مرض والده الرئوي هو الذي دفعه إلى أن يغادر بيترسبيرج ويستقر في فرانكفورت ( ألمانيا ) في عام 1856 عندما كان الطفل كانتور في ريعه الحادي عشر وهكذا عاش فيها الأب حياة رغيدة هنيئة حتى مات في عام 1863 .

أما أمه ماريا بوهم Marria Bohm فتنحدر من أسرة موسيقية عريقة، خالها جوزيف بوهم مدير معهد الموسيقى ومؤسس مدرسة عازفي الكمان ذائعة الصيت التي كان لها الأثر الكبير والحس العميق على تلامذتها .



و كان لكانتور أخ اسمه كونستانتين Constantin الذي أصبح ضابطاً في الجيش الألماني ( قلائل من يهود التحقوا بالجيش آنذاك) وله أخت هي صوفيا نوبلنك Sophie Nobiling .

أما طاقات كانتور الفنية وحسه الذي ورثه عن أمه فظلت حبيسة لم تجد مخرجاً لها إلا في الفلسفة والرياضيات، وربما قد تكون أحد الأسباب التي جعلته في حالة عدم استقرار دائم .

ورغم أن الأب اعتنق البروتستانتية وأمه كاثوليكية -رومانية المولد إلا أن كانتور اختار المذهب البروتستانتي ومن خلاله اكتسب ذوقاً متميزاً في مجادلاته وخاصة في الأمور اللفظية الصغيرة في لاهوت العصور الوسطى، فإذا لم يكن كانتور رياضياً لكان قدره حتماً إما الفلسفة أو اللاهوت ...

ويمكن أن يقال في هذا الصدد إن نظرية كانتور حول اللاهائية باتت حجر الزاوية عند اليسوعيين الذين كانت نزعاتهم المنطقية ممكنة عن طريق الخيال الرياضي الصرف الذي يكمن وراء تصوراتهم اللاهوتية حول إثبات وجود الخالق الذي لا مجال للشك فيه وما التماسك أو الانسجام الذاتي للثالتي المقدس إلا اندماج الثلاثة في الواحد أو الوحدة وما تفرع الواحد إلى ثلاثة إلا تعبيراً عن المساواة والخلود المشتركين.



ومثله مثل الرياضيين الموهوبين، بدأت موهبته الرياضية في سن ما قبل الخامسة عشرة، والتحق بمدرسة خاصة في فرانكفورت وفي دار مشتات، وفي عام 1860 التحق Gymnasium وهو في ريعه الخامس عشر بمدينة فيزبادن. وكان قرار كانتور الابن دراسة الرياضيات واحترافها إلا أن والده كان يصر عليه رغم اعترافه بقدرة الصبي الرياضية الالتحاق بالهندسة لما لذلك من مستقبل ومصدر للرزق مضمون. حتى أن والده كتب في عام 1860 معبرا عن آماله وآمال جميع أفراد عائلته في ألمانيا وفي الدانمارك وروسيا أن يصبح ابنه بمشيئة الله نجما ساطعا في حقل الهندسة .

و قبل دخوله الجامعة وتبعاً لما حققه من نجاح وتفوق في حقل الرياضيات، كتب إلى والده معبرا عن شعوره العميق تجاه حقل المستقبل - الرياضيات - الخطاب التالي:

" والدي العزيز

تستطيع أن تتأكد بنفسك كم كنت مسرورا برسالتك، لقد حددت مستقبلي بالفعل و سأكون مغتبطا عندما أعلم بأنك لن تنزعج إطلاقا عندما يقودني شعوري بما اختاره أنا ، و آمل أن يطيل الله في عمرك لترى فرحتي وسعادتي أيها الأب العطوف حيث أن روحي ووجودي جميعهما يعيشان في مهنتي وماذا يريد



المرء أكثر من شيء يرغب فيه ويتمناه وأن شعوره الداخلي هو الذي يقوده إلى تحقيق ما يصبو إليه "4.

لسنا نعلم ما تركت هذه الرسالة من أثر على الوالد البار، ولكن الذي ندركه هو كم كان شغف الابن عظيماً تجاه الحقل الذي عشقه حتى نهايته المحزنة - سنتحدث عنها فيما بعد- ولكن رغم ذلك الشقاء الذي جعله أحد أئمة الرياضيين، وليس باستطاعتنا أن نتنبأ كيف كان الأمر لو خضع كانتور لرغبة أبيه ، ربما خسر العلم الرياضي نجما براقا وحقلاً لم يحصد .

بدأ كانتور دراسته الجامعية في زيورخ عام 1862 وبعد عام انتقل إلى جامعة برلين إبان وفاة والده وهناك درس الرياضيات والفلسفة والفيزياء ولكن ميوله اندفعت إلى الحقلين الأولين بالتساوي وتاركاً الفيزياء دون مبالاة، ففي الرياضيات تتلمذ على يد الأساتذة كومر Kummer وفيرشتراس Weirstrass وغيره اللدود كرونكر Kronecker. وبناء على العرف السائد في الجامعات الألمانية آنذاك فإنه يحق للطلاب أن يقيم في مدينة ما ويلتحق بالدراسة في جامعة أخرى خارج تلك المدينة وكان الأمر كذلك حيث كان يقيم كانتور عام 1866 في كوتنجن Göttingen ويدرس في برلين.

---

<sup>4</sup> E.T. Bell : Men of Mathematics p.560



لقد كان المناخ الرياضي آنذاك مفعماً بالحساب وبالذات عند  
 أستاذه كומר وكرونكر ولكن كانتور ولع بأعمال جاوس Gauss  
 ونظرياته وهام بها حتى غاص فيها بعمق وبالذات في عمل جاوس  
 الخالد Disquisitiones Arithmeticae "التحقيقات الحسابية" حيث تطرق  
 إلى مسألة صعبة تركها جاوس دون حل . كتب كانتور أطروحة  
 الدكتوراه حول مسألة الأعداد الصحيحة  $x, y \& z$  للمعادلة غير  
 المحددة:  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$  حيث  $a, b \& c$  أعداد صحيحة حيث  
 منحت له الدرجة في عام 1867.

لقد كان غرام كانتور الأول هو أعمال جاوس المتعلقة بالنظرية  
 الرقمية التي فتن بها وسحر بمحتواها ووضوح وكمال براهينها ولكن  
 تأثير أستاذه فيرشتراس جعله يتجه إلى التحليل الرياضي وبالذات  
 المتسلسلات المثلثية (متسلسلات فورييه).

و لكن الصعوبات الحاسمة في هذه النظرية والمتعلقة بتقارب  
 المتسلسلات اللاهائية كانت أقل عمقاً وقرية المنال إذا ما قورنت  
 بنظرية قوى المتسلسلات Power series وهى التي جذبت اهتمام  
 كانتور ودفعته إلى أسس التحليل الرياضي أكثر من معاصريه الذين لم  
 يولوا اعتباراً لها وقادته أخيراً إلى احتضان رياضيات وفلسفة اللاهائية  
 هذه الفلسفة التي تترعرع في قاع جميع القضايا المتعلقة بمفاهيم  
 الاستمرارية والنهايات والتقاربية .



وقبل أن يتجاوز كانتور ربيعه الثلاثين نشرت ورقته الثورية في المجلة كريله Crelle's حول نظرية المجموعات الالهيائية. ورغم أن نتائج هذا البحث غير متوقعة تماماً وكذلك مفارقاتها المتعلقة حول مجموعة جميع الأعداد الجبرية التي صاغها كانتور بطريقة بارعة وكذلك الطرق الجديدة غير المألوفة التي أدخلها في بحثه، فقد وضعت الرياضي الشاب في قائمة الرياضيين الخلاقين غير العاديين بغض النظر عن الإجماع أو الاتفاق الكلي حول هذا الموضوع ، وتبقى مسألة أخرى لسنابصدها ولكن ما يجب قوله هو أن هذا الرجل أتى بشيء كامل الجدة و أزاح صخرة كبيرة كانت بمثابة عثرة في الرياضيات، فهذا العمل منحه قوة ونفوذاً يستحق من خلاله تقليد أي منصب ذي نفوذ وسلطان .

و في عام 1868 حصل على الدكتوراه من جامعة برلين في أطروحة قدمها إلى الجامعة حول " نظرية الأعداد" وبعدها عين أستاذاً بجامعة هاله Halle Universitat دون راتب بل يتقاضى مكافآت من الطلاب مباشرة وهذا النظام كان معمولاً به في الجامعات الألمانية آنذاك ويطلق عليه بالألمانية Privatocent. ولم تكن جامعة هاله كبقية الجامعات الألمانية الأخرى ذات السمعة والصيت المرموق رغم شهرتها في مجال الرياضيات إذا ما قورنت بجامعتي غوتنجن وبرلين.



لقد اقترح عليه زميل كانتور هرنيش أدوارد هاينه H.E.Heine الذي كان يشتغل في نظرية المتواليات المثلثية الاشتغال بإحدى المسائل العويصة المتعلقة بتميز هذه المتواليات أو تفردتها (توحدتها) Uniqueness . وفي عام 1872 عندما كان كانتور في ربيعته السابع والعشرين نشر بحثه حول الحلول العامة لهذه المسألة والتي تعد بمثابة البذرة الأولى لنظرية المجموعات اللاهائية .

إن المسألة التي اقترحها زميله هاينه برزت من خلال أعمال الرياضي الفرنسي الشهير جين فورييه J.Fourier حيث برهن فورييه في عام 1822 أن الرسم البياني لمنحنى "دقيق جداً" (أملس - هو المنحنى الذي يوضح أعداداً من النقط المتناهية غير المتصلة) يمكن تمثيله على مدى الفترة كمجموع لمتوالية مثلثية لانهائية. و بتعبير آخر تتطابق أعداد لانهائية من موجات الجيب و الجيب تمام، فأية نقطة على المنحنى الدقيق جداً (الأملس) عدا نقاط التقاطع يمكن تقريبها إلى درجة من الدقة حسبما نشاء ويقال عندئذ بأن المتواليات متقاربة إلى المنحنى أو إلى دالة عدا أعداد متناهية من النقط أينما تكون .

ورغم أن نظرية كانتور لاقت العديد من المعارضين ولكنه توصل فعلاً إلى أن يجعل المنطق الرياضي يتجدد ويصبح أكثر قوة وصلابة، كان برتراند رسل Russell أحد مؤيديه، و قال رسل مادحاً ومبجلاً إنجازات كانتور "بأنها أعظم الإنجازات التي يفتخر بها العصر".



في عام 1874 تزوج كانتور فالي كوتمان Vallay Guttman وقضى العروسان صيفهما على جبال هارتز Harz وهناك التقيا بالرياضي ديدكن Dedkind وكان هذا اللقاء مثمرا بالنسبة إلى كانتور لأنه ناقش المسائل الرياضية التي كانت تشغله، فقبل عام من زواجه كتب إلى ديدكن خطابا استعرض فيه إحدى المسائل التي كانت تشغله في موضع اهتمامه ذكر فيها: "هل بالإمكان تطابق نقط سطح ما (مربع ومن ضمنه نقط حدوده) مع نقط الخط المستقيم (من ضمنها نقطتي البداية والنهاية) أي أن أية نقطة على السطح تناظرها أخرى على الخط المستقيم وبالعكس؟ وبالتعاون مع ديدكن أعطى كانتور الشكل النهائي لنظرية الأعداد الحقيقية بغية تحويل التحليل الرياضي إلى حساب، أي لاستخراج تعريف الأعداد الحقيقية من مفهوم النهاية، فانطلق من مبدأ التقابل Bijection ومنه توصل إلى نظرية الرتب المتصاعدة .

## 2. خصوم كانتور : القطيعة الكبرى مع ليولد كرونكر:

لقد كان عرض "الأسس" Grundlagen عرضاً رياضياً دقيقاً حول المجموعات الجديدة للأعداد الموهلة بالإضافة إلى الدفاع المحسن عن اللاهائية الحقيقية، ذلك المفهوم الذي حاولوا معظم الفلاسفة واللاهوتيين وحتى الرياضيين أنفسهم على دحض مفهوم اللاهائية الحقيقية وبالأخص عندما حذر الفلاسفة في منطقهم المتشدد



حول المفارقات الموجودة في طبيعة اللاهائية و سلوكها الغريب منذ ما قبل السقراطيين عندما بدأوا اكتشاف أشكالها المتناقضة. وعلى سبيل المثال رفض أرسطو مفهوم اللاهائية الكاملة و بالمثل دحض رجال الدين المسيحي اللاهائية الحقيقية باعتبارها هجومياً مباشراً وتحدياً لوحدة الله المطلقة وطبيعتها اللاهائية .

وحدث الأمر نفسه بالنسبة للرياضيين عندما سلكوا مسار الفلاسفة حيث اعوج سبيلهم تجاه تطبيقات اللاهائية الحقيقية ومن هذا النزاع اشتد غيظ الرياضي الكبير فريدريك جاوس Gauss وعبر عن وجهة نظره هذه في رسالة كتبها إلى هنريش شوماكر Heinrich Schumacher مصرحاً احتجاجه على مثل هذه اللاهائيات قائلاً :

"بالنسبة إلى برهانك، فإنني أعترض بشدة على استخدام اللاهائية ككمية متكاملة فهي مرفوضة بتاتا في الرياضيات، فاللاهائية ليست إلا شكلاً بل تعبيراً لفظياً فحسب *facon de parler* . "

لقد كان كانتور يعلم كل العلم بأن نظريته الجديدة حول المجموعات اللاهائية والأعداد الموهلة ستلاقي حتما معارضة شديدة وهذا بالتأكيد لما تمثله نظريته من إزاحة الاعتقاد التقليدي السائد - وهذا مصير أية فكرة جديدة- لذا كان أحد أهداف "الأسس" هو إثبات أنه ليس ثمة سبب لقبول الاعتراضات القديمة حول اكتمال اللاهائية الحقيقية و من الممكن أيضا الإجابة على هؤلاء الرياضيين



أمثال جاوس والفلاسفة أمثال أرسطو واللاهوتيين كتوماس الأكويني سيجدون أنفسهم في وضع معين وفي يوم ما غير قادرين أن يرفضوا تلك الفكرة لأن كانتور نفسه لم يتطرق إلى القضايا المعرفية للأعداد الموغلة فحسب بل إلى التصورات الميتافيزيقية المصحوبة بها لأن هذه التصورات بمثابة الروح النابضة في أية فلسفة.

لقد كان كانتور مدافعاً عن الأساس الرياضي ومؤكداً شرعية النظرية الجديدة محالاً أن لا يترك أية ثغرة، هكذا كان يشعر بأنه مجبر كي يدافع عن عمله من أي شكل من الهجوم وبأي مستوى وكان مستعداً لمواجهة الاحتجاجات الفلسفية والدينية التي ربما تبرز من تناول مفهوم اللاهائية الحقيقية .

إن تفاصيل برنامج كرونكر حول "التحبيب" "Arithmetisation" الهادف إلى أن الرياضيات برمتها ما هي إلا أعداد نهائية من العمليات تتضمن فقط الأعداد الصحيحة، تم تلخيص هذا البرنامج في مقاله الموسوم "حول مفهوم العدد" "Über den Zahlbegriff" وكما ذكرنا سابقاً أن كانتور كتب أطروحته تحت إشراف كرونكر وذكرنا أيضاً بأن أعمال كانتور التي نشرت عام 1878 حققت له نصراً عظيماً وجعلته يقف في مقدمة رياضيي عصره، هذا النصر سرعان ما خفت بريقه وتحول إلى جحيم. بدأ خصومه يشنون حرباً لا هوادة ضده وبدأت القطيعة الأولى مع أقرب أصدقائه ومعلمه



وأستاذه بجامعة برلين ومحرر مجلة كريله Crelle، الرياضي الآنف الذكر ليولد كرونكر .

لم يدرك كانتور وضعه المتطرف في الوقت الذي كان فيه كرونكر يجمع قواه في بداية 1870 لمعارضة مفاهيم نظرية بولزانو-فيرشتراس Bolzano-Weirstrass حول النهايات، النهايات القصوى والدنيا وكذلك الأعداد الصماء . وكون كرونكر محرراً للدورية الآنف الذكر فقد كان باستطاعته أن يرفض أي بحث يرسل للنشر أو يجمده حتى وإن كانت هناك محاولة من قبله لعدم نشر أعمال هايينه Heine لعام 1872 ولكن هايينه لم يعرقل فيما بعد.

وأوشك الأمر نفسه أن يحدث مع كانتور عندما أرسل بحثه في الثاني عشر من يوليو عام 1877 لم ينشر في الحال كما كان توقعه رغم وعود المحررين الآخرين بقبوله وجهود فيرشتراس المضنية إلا أنه لم يحدث أي شيء يذكر حول نوايا كرونكر. شعر كانتور بخطورة الوضع وخشي تدخل كرونكر في الموضوع، حينها كتب رسالة مرة إلى صديقه ديدكن Dedkind يشكو حاله وما تلاقيه أعماله من سوء المعاملة مقترحاً الانسحاب، إلا أن حكمة ديدكن خففت وطأة الانفعال وألح عليه الصديق بعدم الانسحاب وبالالتزام بالصبر وبالفعل فقد كان صديقه مصيباً حيث ظهر البحث في 1878 واتضح



لكانتور بأن ملاحظة كرونكر ليست أكاديمية صرفه وإنما شخصية  
فحسب .

ومن منطلق شخصي بحث لم يرد كرونكر أن تنشر أعمال  
كانتور لأنه كان يرفض مفهوم اللانهاية الحقيقية أو المكتملة  
وكذلك الأعداد الموهلة. لقد كانت الحملة التي شنّها كرونكر  
مشحونة بالغيرة على حد تعبير إسحاق أسيموف Asimov .

وكان كرونكر دوماً معارضا له، بل كان يبذل جل اهتمامه  
وجهدّه في عرقلة تقدم كانتور وإبعاده عن سلك التعليم بجامعة  
برلين حتى دفعه إلى ترك برلين والالتحاق بجامعة هاله وهناك بدأت  
تظهر عليه نوبات الانهيار العصبي وعلى أثرها أدخل مستشفى  
الأمراض العقلية ومكث فيه ثمانية أعوام حتى وفاته.

وأخيراً من هذا الخليط الدولي الذي يسري في عروق كانتور  
من أب دنماركي وشهادة ميلاد روسية إلى العيش حتى نهاية حياته في  
ألمانيا بوسع أية دولة أن تتبنى هذا العبقرى مواطناً فيها وابناً باراً لها،  
و لكن كانتور نفسه فضل ألمانيا ولا نستطيع أن نجزم ما إذا كانت  
ألمانيا قد فضلتها بالمقابل؟؟؟



## الفصل الثاني

مفهوم اللانهاية قبل كانتور







## مفهوم اللانهائية قبل كانتور

" ما هو ذلك الشيء الذي لا يبدو للعيان و إذا بدأ يكون غير موجود ؟  
إنه اللانهائية " . \*

ليوناردو دافنشي

لقد بدأت مسألة اللانهائية من تعريف طاليس<sup>1</sup> Thales الذي قال فيه "تلك التي ليس لها بداية أو نهاية"، ومنذ ذلك الحين بدأ هناك تأثيران أساسيان يلعبان دورهما في مفهوم اللانهائية، الأول تخميني أو حدسي وهو التيار الذي انطلق منه انكسمندر (610-546 B.C) Anaximandar المالتيسي، أما الآخر فتمثله المدرسة الفيثاغورية عن طريق اكتشاف أصحابها "المسألة اللاقياسية" التي أدت بهم أخيراً إلى مفهوم الأعداد الصماء Irrational Numbers .

ومن ناحية تاريخية يمكن القول إن مسألة اللانهائية في الفكر الغربي بدأت بمراحل ثلاث، الأولى ويطلق عليها "ما قبل الأرسطية" وهي جميع الأفكار الفلسفية والرياضية التي سبقت أرسطو والثانية هي المتمثلة في تحليل اللانهائية عند أرسطو نفسه وبعض شارحيه وهي المرحلة "الأرسطية" أما المرحلة الأخيرة فهي متمثلة في أعمال كانتور

---

\* ترجمة كاتب هذه السطور

<sup>1</sup> نود أن نشير هنا إلى أن بعض الحضارات التي تسبق اليونانية كانت تعرف مفهوم اللانهائية ووردت في أدبياتها كالهندية مثلاً .



وآخرين. وسيكون التركيز هنا على المرحلة الأخيرة مع الإشارة  
الخاطفة إلى المرحلة الأولى المتمثلة في المدرسة الفيثاغورية التي برز فيها  
الإطار العلمي بوجه عام والإطار الرياضي بوجه خاص، أما بالنسبة  
إلى المرحلة الأرسطية فيغلب عليها الطابع الفلسفي المحض.

لقد مهد فيثاغورس Pythagoras (582-497 ق.م) الساموسي  
وتلامذته الطريق إلى مسألة اللاهائية والتي تعتبر بحق فصلا من  
فصول تاريخ الرياضيات، إن لم تكن الرياضيات برمتها هي علم  
اللاهائيات، هذا ما عبر عنه الرياضي الشهير هيلبرت Hilbert  
جاءت المسألة من خلال اكتشاف الفيثاغورين لمسألة اللاقياسية  
Incomensureability والتي تعتبر بحق انعطافا حادا لتعاليم المدرسة  
الفيثاغورية وذلك ما أجبر فيلسوف الرياضة والمنطقي برتراند رسل  
Russell أن يعبر أجمل تعبير عندما قال "إن مسألة اللاهائية بدأت أول  
الأمر عند الفيثاغورين في محاولاتهم للمسألة اللاقياسية". وحتى  
أرسطو نفسه صرح بذلك قائلا "أنه فيثاغورس الذي وضع  
اللاهائية بين الكينونات المحسوسة الأخرى".

هكذا جاء اكتشاف الفيثاغورين عند التعويض عن أضلاع  
المثلث القائم الزاوية بالوحدة، فإن الوتر عندئذ سيكون مساويا  
للجذر التربيعي للعدد اثنين ( لنفرض المثلث abc القائم الزاوية في b،  
فإذا كان  $ab=bc=1$  فإن الوتر  $ac$  يساوي  $\sqrt{2}$  وذلك بناء على نظرية



فيثاغورس الشهيرة التي تنص على أن المربع المنشأ على الوتر يساوي مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين. ونتيجة تطبيقهم الهندسية فإن العدد يجب أن يكون صحيحاً (فمثلاً إذا كان الضلعان  $ab=3$  و  $bc=4$  يساويان فإن الوتر  $ac=5$  يساوي وهكذا ...

ولكن الكارثة تبدو عندما يكون الناتج  $\sqrt{2}$  أو  $\sqrt{3}$  أو أي جذر تربيعي آخر غير تام (الجذر التربيعي التام مثلاً  $\sqrt{9}$ ،  $\sqrt{36}$  ... الخ) لقد كان هذا العدد الناتج أكبر صدمة بالنسبة إلى برنامج وتعاليم المدرسة الفيثاغورية إن لم يكن تحدياً بالمعنى الذي يجبر المدرسة على تصحيح بعض مفاهيمها أو التغلب على مثل هذه الصعوبة، ولكن تلامذة المدرسة اتخذوا أسلوباً آخر وهو كتم السر واعتباره من الأسرار المقدسة ويعاقب من ييوح بذلك لأن إفشاء مثل هذه الأسرار يعني انهيار كامل للمدرسة نفسها التي تقف وراء شعار "العدد هو أصل كل شيء" ويجب أن يكون العدد صحيحاً وهذا ما أثبتته لهم التجربة والقياس والحدس أيضاً، لأن اكتشافهم هذا خال تماماً من اللوغوس Logas - أي العقل - وأن هذه الأعداد غير صحيحة تماماً ومن ثم تتنافى مع العقل .

إذا كانت الأشياء يمكن التعبير عنها بالأعداد الطبيعية ج، د مثلاً فإن التناسب  $a : b = ج : د$  حيث ج، د هما النسبة بين ضلع المربع و قطره ويمكن البرهنة أيضاً على أن أعداداً طبيعية كهذه لا يمكن أن توجد، فالنسبة في حد ذاتها غير صحيحة ومن ثمة لا تحمل



اسما على الإطلاق فلتكن اللاهائية ذاتها  $\text{Aperion}$  وقيل أيضا إنها  $a$   $\log a$  أي غير قابلة للتعبير وباليونانية آرتوس  $\text{arratos}$  أي دون نسبة. و لقد تم أخيرا البرهنة على أن هذه الأعداد التي يطلق عليها الأعداد الصم (غير المنطقة) ليس إلا سلسلة لاهائية من الأعداد الصحيحة. هذا بالإضافة إلى أنه تم البرهنة أيضا على وجود الأعداد الصماء من خلال طول أضلاع المربع وقطريه، ومن هذا المنطلق استبدل التصور الفيثاغوري بمفهوم الاستمرارية وهو أن كل خط مستقيم يمكن تقسيمه إلى ما لا نهاية من الأجزاء وعدد نقاطه تكون لاهائية أيضا .

إن مفارقات زينو  $\text{Zeno}$  ( 450-؟ ق.م) الأيلي الشهيرة التي تقوم على فرضية كل من الزمان والمكان قابل للتقسيم اللاهائي. واستنادا إلى المؤرخ الرياضي الأمريكي الشهير فلورين كاجوري  $\text{Cajori}$  فإن تاريخ هذه المفارقات ليس إلا تاريخا لمفاهيم الاستمرارية واللاهائية. فهذه المفارقات تتعارض مع المفاهيم التقليدية حول اللاهائية في الكبر و كذلك اللاهائية في الصغر التي تزعم بأن مجموع المقادير اللاهائية يمكن أن تتضاعف حسب ما نشاء حتى إذا كانت الكمية المضافة صغيرة جدا وبالرموز وبلغة رياضية  $\infty$  .

لقد كانت انتقادات زينو أكبر تحد لتلك المفاهيم وما مفارقاته الأربع الشهيرة إلا بلبلة فكرية لتلك المفاهيم. تنص المفارقة (أحجية) الأولى: "إذا كانت هناك كثرة فهي يجب أن تكون لا



متناهية الصغر ولا متناهية الكبير. إن الكثرة يجب أن تكون متناهية الصغر لأنها مركبة من وحدات و هذا ما نقصده بقولنا إنها الكثرة".<sup>1</sup> المفارقة الثانية تقول " حتى يمكن لجسم أن يقطع المسافة يجب أولاً أن يقطع نصف المسافة، ولا يزال هناك نصف النصف لقطعه ثم نصف نصف النصف وهكذا إلى ما لا نهاية ومن ثم سيظل دائماً جزء لم يقطع وعلى هذا يستحيل على الجسم أن ينتقل من نقطة إلى أخرى ومن ثم لا يمكن أن نصل".<sup>2</sup>

والثالثة حول السباق بين أخيل و السلحفاة " فإذا كانت السلحفاة سابقة على أخيل فإنه لن يستطيع أن يلحقها (يدركها-إضافة)، فلولاً يجب أن يصل (أي لن يصل إلى النقطة التي انطلقت منها السلحفاة -إضافة ) إلى النقطة التي انطلقت منها السلحفاة وعندما يصل إلى هناك تكون السلحفاة قد انتقلت أبعد ومن ثم فعلى أخيل أن يصل إلى تلك النقطة وسيجد أن السلحفاة قد وصلت إلى نقطة ثالثة وسوف يستمر هذا إلى الأبد ومن ثم فإن المسافة بينهما تتناقص باستمرار لكنها لا تجتاز (تقطع) كلية، ومن ثم لن يلحق أخيل بالسلحفاة على الإطلاق ". بمعنى " يظلان إلى ما لا نهاية، فلو ظل المتسابقان إلى آخر الدهر فلن يلحق أخيل بالسلحفاة".<sup>3</sup>

يرى الرياضي التشيكي بولزانو Bolzano أن فكرة اللانهاية مجردة من السلب، لأنها خرجت من فكرة النهائية نفسها وكما يقول "إننا

1،2،3 الشيخ كامل عويضة: زينون، وما حققته الفلسفة اليونانية.



نضع اللاهائية كنقيض للنهاية نفسها ". وتعريف -اللاهائية- الذي قدمه لنا بولزانو واستخدمه كانتور فيما بعد ينص على الآتي:  
اللاهائية أو اللاهائي هي تلك التي تكون قادرة على أن تخضع لعلاقة التطابق واحد-إلى-واحد الكل مع الجزء نفسه .

ولكن أول من أدخل رمز اللاهائية ( $\infty$ ) هو الرياضي الإنجليزي جون والس John Wallis ( 1616-1703 ) ويطلق عليه " عقدة الحب المعقوفة" والغرض من هذا الرمز يكمن في الحقيقة التالية وهي أنه بإمكانك الدوران اللاهائي حول هذا المنحنى بصورة مستمرة، هذه هي اللاهائية بعينها، بينما قدم لنا كانتور الرمز ( $\aleph$ ) وهو الحرف الأول في الأبجدية العبرية ويلفظ ألفا كالعربية وهو أيضا أول عدد لاهائي ضمن أعداد كانتور اللاهائية .

لقد كان رياضيو وعلماء القرن السابع عشر يتحدثون عن مفهوم اللاهائية ولكنهم لم يدركوا حقيقة هذا المفهوم الغامض ولم يدركوا أيضا إنه في يوم ما ستكون اللاهائية مفهوما صحيحا وحقيقيا رغم انه لا يزال عند البعض الآخر عبارة عن مصطلح يستخدم لوصف أي كمية كبيرة لا يمكن إدراكها .

فجاليليو Galilio مثلا يرى أن المجموعات اللاهائية متساوية أي أن عدد نقاط الخط المستقيم تساوي عدد نقاط خط مستقيم آخر، لأن



كليهما لا نهائيان وأن فكرة أن أحدهما أكبر أو أصغر من الآخر غير واردة في واقع اللامتناهيات فجميعها متكافئة بل متساوية.

هذه هي الشرارة الأولى التي انطلق منها كانتور والتي ستكون محور حديثنا عن أعمال هذا الرياضي الفذ التي أصبحت نظريته حجر الزاوية لكل فرع من فروع الرياضيات. فكانتور يعتبر أية مجموعتين لانهائيتين متساويتين إذا خضعتا إلى قاعدة المطابقة واحد-إلى-واحد فقط وخلاف ذلك تكون إحدهما إما أكبر أو أصغر من الأخرى .

إن تعريف جاليليو دون شك أنار الطريق ورسم الفكرة الأساسية لرياضي العصر الحديث وبالذات إلى مفهوم اللانهائية الحقيقية Actual Infinite ومنطلق أسلوب جاليليو هو استنباط المجاميع الكلية للأعداد على أنها لانهائية وبالمثل بالنسبة إلى مربعات الأعداد نفسها، ويمكن توضيح ذلك بالرموز كالآتي:

$$1, 2, 3, \dots \quad \infty$$

$$1 \quad 4 \quad 9 \quad \dots \quad \infty$$

وجاءت وجهة نظر ليبنتز Leibenz حول اللانهائية الحقيقية من خلال رسالة كتبها إلى صديقه فوخر Faucher في عام 1693 قائلا: أنني ميال كثيرا إلى فكرة اللانهائية الحقيقية، لذا أعتقد بأن ليس هناك جزء من المادة -لا أقول- غير قابل للانقسام ولكن يمكن تقسيمه فعلا".



وتفهم لينتز لمفهوم اللاهائية الحقيقية ناجم عن فلاسفة  
العصور الوسطى وبالذات كاستوسا برونو Bruno وكما اقترح  
رسل أن مفهوم اللاهائية لدى لينتز شبيه بتلك اللاهائية التي أطلق  
عليها هيجل " اللاهائية الكاذبة" وما اللاهائية الحقيقية في نظر  
هيجل إلا العقل نفسه.

فاللاهائية في الرياضيات هي اسم يطلق على أي شيء - كمية -  
لا يمكن أن يتصورها العقل، لهذا السبب هناك العديد من الرياضيين  
من وقف ضد فكرة اللاهائية أو حتى التفكير بها لأن ذلك يعني  
بالنسبة لهم غير كامل أو مكتمل - اللا اكتمال - بينما يرى فريق آخر  
على إنها مفهوم كامل ومحدد ومن أنصار هذا المفهوم هو جورج  
كانتور، الذي تشكل محاولاته انعطافا حادا في تاريخ العلم وفي نظرية  
اللاهائيات وما أتى به في الواقع ليس إلا ثورة حقيقية في عالم  
الرياضيات، لقد هذب اللاهائية وصقلها ثم وضعها في عالم المحدود  
والمحدد واليقين بدلا من عالم اللامحدود واللامعين، لذا جاءت دراستنا  
هذه تاريخا لحياته وإبرازا لأعماله .

وهكذا جاءت نظرية كانتور لتكون تنويجا لأفكار عصره  
حول مسألة اللاهائية التي حججها التأثير والتحليل الأرسطي الذي  
أغرقها في محيط اللامحدود واللامتعين. فاللاهائية من وجهة نظر  
شارحها الأول أرسطو تكون غير مكتملة إطلاقاً فهي جهدية ومحتملة



فقط بينما يرى كانتور العكس تماما فهي أي اللانهائية تبرز عنده في شكلين مختلفين، لانهائية غير تامة، تتجاوز حدود الكميات في الكبير والصغر ولكن تبقى نهائية ويمكن أن يقال عنها "متغير نهائي" وهذا ما يطلق عليه "الانهائية الممكنة" Potential Infinite والأخرى كمية محددة، ثابتة يمكن تصورهما بمفاهيم مختلفة في الهندسة وفي نظرية الدوال بنقطة لانهائية في المستوى المركب، هذه هي اللانهائية الحقيقية Actual Infinite.

لقد أصبح كانتور واحدا من رواد رياضيي القرن التاسع عشر بجانب ريمان Riemann وهنكل Hankel وهارنك Harnak وبوس ريموند Bois Reymond وآخرين الذين انصبت أعمالهم حول خصائص نقطة المجموعة Point set وآفاقها بالنسبة للتحليل الرياضي وكانت مساهمة كانتور متميزة وفي غاية الروعة.

وانصبت أعماله حول تأسيس البناء الراسخ للأعداد اللانهائية التي أطلق عليها "الأعداد الموعلة" Transfinite numbers، وكانت موضع نقاش وجدال شديدين منذ بدايتها ولذا كانت جهوده موجهة بالفعل في الدفاع عن هذه المفاهيم الجديدة وشم المحاولة الجادة في تطويرها ومن هذا المنطلق اتسمت أعماله بالجددة والأصالة والثورية. ويمكن أن يقال أن أكثر فروع الرياضيات الحديثة تعتبر نظرية المجموعات هويتها الأصلية التي تنطلق منها كإساسيات لفهم



موضوعاتها، وما التطور التاريخي لنظرية المجموعات الكانتورية إلا برهان عقلي لهذه الحقيقة.

و السؤال المطروح حاليا، كيف تكون الموضوعية المجردة التي تنسب إلى النظرية العلمية الجديدة تؤثر على مطوري ومبدعي هذا الفرع من المعرفة؟

الإجابة طبعاً في غاية التعقيد المنطقي والابستمولوجي وهذا ما حدث بالفعل في مضمون اللاهائية في الرياضيات التي ناضل كانتور من أجله ودافع عنه طوال حياته وعانى الكثير وواجه معارضة شديدة من معاصريه الرياضيين بل وحتى من الفلاسفة واللاهوتيين، جميعهم رفضوا فكرة اللاهائية الحقيقية ونبذوها تماماً ولسنا نعلم لم هذا العداء ولم هذه المعارضة ألم يعلموا أنه في يوم ما ستكون هناك تطبيقات لا تحصى لهذه النظرية، أنني لا أجد أي تبرير سوى مرضهم الفكري البائت .

### الأعداد الصماء واشتقاق المجموعات :

كانت أطروحة كانتور لعام 1867 التي كتبها في جامعة برلين تحت إشراف كل من: كومر Kumar وكرونكر Kronecker تتعلق بمسألة شاقة في نظرية الأعداد ذلك الفرع الذي لم يثر حماسه لنظرية المجموعات ورغبته فيها. ففي عام 1869 ترك برلين ليشغل منصب



أستاذ بجامعة هاله Halle وهناك وجد زميله إدورد هاينه E.Heine الذى كان يبحث فى مشكلة تتعلق حول نظرية المتواليات المثلثية .  
لقد اعترف هاينه بكفاءة وقدرة كانتور العلمية والرياضية ووجد فيه العزم الصادق كي يتناول موضوعا كهذا، وبالفعل شجعه وألح عليه أن يعالج إحدى المسائل المهمة فى التحليل الرياضي وهي: أن افترض أية دالة ( اختيارية) يمكن تمثيلها كمتوالية مثلثية ذات نمط وحداني؟

استطاع هاينه فى عام 1870 أن يجيب عن جزء من هذه المشكلة وذلك بافتراض أن الدالة الاختيارية مستمرة أينما كانت، وبالمثل فإن المتوالية المثلثية تكون تقاربية منتظمة أينما وجدت. وكانت مثابة وحماسة كانتور تدوران حول إيجاد الحل الحاسم لهذه النظرية وهو وحدانيتها Uniqueness.

هذا ما انجزه كانتور بالفعل فى مبرهنة الأولى لعام 1870 ووجد من الضرورى أن يفترض أن المتوالية المثلثية تقاربية لجميع قيم  $(x)$ . وفى عام 1871 نشر ملاحظة مختصرة تبين على أنه يمكن صياغة نظرية أخرى لقيم محددة ل  $(x)$  إما تمثيلا للدالة أو تخليا عن المتوالية التقاربية طالما يبقى مجموع النقط الاستثنائية محدودا أي نهائيا .

جاءت أهم إنجازات كانتور فى عام 1872 عندما برهن بنجاح على أنه حتى الأعداد اللانهائية من هذه الاستثناءات يمكن أن يسمح لها



طالما يمكن توزيعها بصورة محدودة و يمكن توضيح إثباته الأخير بصورة مبسطة قدر الإمكان . لقد وجد كانتور نفسه مقتنعا كل الاقتناع بتطوير نظرية للأعداد الحقيقية وذلك عن طريق التعامل مع المجموعات اللانهائية للنقط المستثناة التي في حوزته، منتقدا في ذلك الأعداد الصماء باعتبارها "نهاية" لسلسلة لانهائية من الأعداد الصحيحة.

لنأخذ الأعداد الصحيحة (A) التي هي سلسلة من الأعداد  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  هذه المتوالية تخضع للشرط الآتي: لأي عددين  $m$  و  $n$  مهما كان  $n$  كبيرا، فإن المتباينة  $A_{n+m} - A_n \leq K$  حيث  $K$  عدد صحيح صغير جدا ولكنه أكبر من الصفر. أطلق كانتور على هذه المتوالية التي تحقق الشرط " بالمتوالية الأساسية" ويقال أيضا إنها ذات نهاية محدودة (b)، و على المجموعات (b) المرتبطة بالمتوالية اللانهائية  $A_n$  بالرمز B.

أي عددان  $b$  و  $b'$  معرفان بالمتوالية  $a$  و  $a'$  يقال أنهما متساويان  $b = b'$  إذا كان  $a - a'$  يؤول إلى كمية صغيرة جداً هي (v) وتكون في ازدياد مستمر بلا حدود . اعتبر كانتور المتوالية اللانهائية لعناصر B ب  $b, b, b, \dots, b$  و لكل متوالية أساسية  $b_n$  يوجد عدد مرتبط بها هو  $c$  ، هكذا انطلق كانتور من هذه الخلفية ليعرف رتب أعلى من  $c$  .



استطاع كانتور أن يجعل أعدادا أخرى من  $B$  و  $A$ ، باستخدام المتواليات اللانهائية وعلى نفس النمط السابق توصل إلى رتب أخرى أعلى درجة - رتب متزايدة- ولكن المشكلة التي واجهته في تحديد الأعداد الحقيقية المتمثلة بنقط الخط المستقيم ؟ من الواضح جدا إن أية نقطة على الخط المستقيم تناظر أو تطابق عددا حقيقيا ولكن السؤال هنا أي عدد من  $B$  يناظر نقطة على الخط المستقيم ؟ لذا استدعى كانتور البديهية الآتية: لكل عدد حقيقي تناظره نقطة محددة على الخط المستقيم حيث تكون إحداثيتها تساوي العدد نفسه .

وقبل نهاية عام 1873 استطاع كانتور أن يكتشف السر الكامن وراء طبيعة مسألة الاستمرارية، ففي عام 1874 نشر نظرية هامة في المجلة الدورية كريله Crelle تنص على : إن مجموعة الأعداد الحقيقية  $R$  لا يمكنها أن تكافئ/ تناظر واحد-إلى-واحد مع الأعداد الطبيعية  $N$ .

وبتعبير آخر فإن المجموعة  $R$  غير قابلة للعد إذن  $\text{non-denumerable}$  ويمكن إثبات نظرية كانتور بالخطوات الآتية:

نفرض أن الأعداد الحقيقية (  $\omega$  ) قابلة للعد - أى يمكن وضعها على صورة تناظر واحد-إلى - واحد مع الأعداد الطبيعية

$$\textcircled{1} \quad \omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \dots \omega_n$$



و في أية فترة مقفلة  $[a, b]$  تنتمي إلى  $R$  يمكن الحصول على عدد حقيقي  $\eta$  في  $R$  وبالرموز فإن  $\eta \in R$

و إن  $\eta$  لا يمكن وضعها ضمن المتوالية ①

لنفرض أن  $a < b$  ، ولنأخذ أي عددين بحيث يكونا ضمن الفترة المقفلة  $[a, b]$  ولنرمز إليهما بـ  $a'$  و  $b'$  ، فهذا بالتالي يشكل فترة أخرى ولتكن  $[a'', b'']$  وبلاستمرار على هذا النحو ، توصل كاتنور إلى متوالية من الفترات المقفلة أطلق عليها الفترات العشية nested Internal

وهي على صورة  $[a^n, b^n]$  حيث  $a^n, b^n$

أول عددين من المتوالية (1) يدخلان ضمن الفترة  $[a^{n-1}, b^{n-1}]$  .

فإذا كان عدد الفترات متناهيا، فإنه على الأغلب هناك عدد واحد يمكن أن تحتويه الفترة  $[a^n, b^n]$  .

وببساطة يمكن أن يستنتج أن العدد  $\eta$  المأخوذ من الفترة غير مدرج ضمن قائمه المتوالية (1) فأى عدد حقيقي ينتمي إلى الفترة المقفلة  $[a^n, b^n]$  سيفي بالغرض طالما لا يمثل العدد الأدنى المذيل في المتوالية (1) .

وبصورة أخرى إذا كان عدد الفترات  $[a^n, b^n]$  غير نهائي فإن جدول كاتنور ينتقل إذا إلى مفهوم النهاية حيث أي المتوالية  $a^n, a^{n-1}, \dots, a^2, a^1, a$  لا تتزايد بدون حدود ، ولكنها محصورة ضمن



$[a'', b'']$  ويمكن اقتراح حد أعلى يرمز له  $(a^\infty)$  وبالمثل بالنسبة

للمتوالية  $b'', b'', b'', \dots, b''$  يمكن أن نحدد لها حداً أدنى  $b^\infty$

حيث  $a^\infty < b^\infty$  (الحد الأعلى أصغر من الحد الأدنى) كما الحال

(٤) في عالم النهايات ، أي عدد حقيقي ينتمي إلى  $(a^\infty, b^\infty)$  فإنه

يكفي أن نأتي بالضرورة بعدد حقيقي غير مدرج في المتوالية (1) .

ومهما يكن من الأمر فإن  $a^\infty = b^\infty$  .

لقد أقترح كانتور على أن العدد الحقيقي  $\xi$  يساوي  $a^\infty, b^\infty$

الذي ليس بعنصر في المتوالية (1) وكما أفترض أن  $\eta$  ضمن الفترة

$[a'', b'']$  وهذا نقيض لما تم البرهنة عليه، ويستنتج على أن مجموعة

الأعداد الحقيقية (R) غير قابلة للعدد .







## الفصل الثالث

### اللانهاية عند كانتور







## اللانهاية عند كانتور

"إنني أراها ولكنني لا أصدقها"

كتب كانتور إلى ديدكن

تعتبر نظرية المجموعات والأعداد الموهلة أحد الإبداعات والإنجازات الرئيسة بل والتميزة في أعمال كانتور تحديداً وفي تاريخ الرياضيات وفلسفتها بصورة أعم . وتعتبر أبحاث كانتور الأولى والتي هي سلسلة من الدراسات، بدأ مسارها منذ عام 1870 وكان محورها يدور حول المتسلسلات المثلثية. ولقد كان تحليل الدوال هو الحافز الذي دفع كانتور إلى فكرة " مجموعة النقط " Point set ومن ثم إلى اكتشافه الخالد "الأعداد الموهلة" أي أعداد ما وراء المنتهي.

لقد كانت أعمال كانتور المبكرة منصبة حول متسلسلات فورييه Fourier Series وهي المتسلسلة المثلثية التي يمكن التعبير عنها بالصورة التالية:

$$F = 1/2 a_0 + \sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

$$= 1/2 a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

حيث  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, \dots$  أعداد ثابتة تسمى معاملات فورييه. وتستخدم هذه المتسلسلة لتمثيل أو تقريب أية دالة دورية



(دورتها  $2\pi$ ) وحيدة القيمة وذلك عن طريق تحديد قيم مناسبة للمعاملات.  
ومعاملات فورييه هي :

$$a_n = 1/\pi \int f(x) \cos(nx) dx \quad n \geq 0$$

$$b_n = 1/\pi \int f(x) \sin(nx) dx \quad n \geq 1$$

و  $F$  هذه ناتجة عن الدالة  $f(x)$  ومعاملاتها أو مع أي معاملات أخرى، ويمكن أيضا دراسة تقاربها<sup>1</sup> الذي يؤول إلى نهاية الدالة. فإذا تقاربت مثلا المتسلسلتان إلى نفس الدالة عند أية نقطة، فلتكن  $x$  في الفترة  $(0, 2\pi)$  فإن الفرق بينهما يؤول إلى دالة صفرية ( $f(x)=0$ ). والمشكلة التي كلنت مطروحة أمام كانتور هي كيفية إثبات أن المتسلسلة المذكورة وحدانية؟<sup>2</sup>.  
في عام 1829 نشر درشلت Dirichlet (1805-1859) مقالا حول تقاربية متسلسلة فورييه وكانت أبحاث فورييه وقتذاك تتعلق بموضوع التوصل الحراري وعن طريقها توصل إلى أن أية دوال معطاة (اختيارية) فإنه يمكن تمثيلها بمتسلسلات مثلثية ذات معاملات من نمط خاص عرفت فيما بعد "بمتسلسلة فورييه".

---

<sup>1</sup>متسلسلة تقاربية Convergent series :تكون المتسلسلة تقاربية إذا كان مجموع حدودها متقارباً عند حد ما أي تتقارب المتسلسلة إلى مجموعها المحدد وليكن  $L$  إذا كان الحد النوني للمتوالية المكونة من المجاميع الجزئية لحدود المتسلسلة هي  $L$ .  
<sup>2</sup> Uniqueness هي المتسلسلة التي تؤول إلى نهاية واحدة فقط على مدى فترة محددة .



وعلى خطى فورييه طور كوشي Cauchy نتائج عدة على طريقته الخاصة ولكن ذلك لم يقنع درشلت لأن الأخير كان متحمسا لإيجاد القاعدة الصلبة والتميزة لتلك المتسلسلة. وبرهن كوشي على أن حدود المتسلسلة تتناقص وتشكل متسلسلة تقاربية.

ففي عام 1870 أنجز كانتور أولى نتائجه المتعلقة بوحداية الدالة، وهي، إذا كانت الدالة متصلة في فترة ما، فإن تمثيلها بواسطة المتسلسلات المثلثية يكون وحدانيا. أما أعماله الأخرى فكانت تدور حول متطلبات الدالة التي يجب أن تكون متصلة على مدى الفترة.

لقد بحث كانتور عام 1872 قضايا أكثر تعميما لنتائجه حول نظرية الوحدانية قادته إلى اكتشاف نتائج مهمة وهكذا تركزت أعماله في العام المذكور حول اقتراب  $F$  إلى دالة صفرية عند أية نقطة في الفترة  $(0, 2\pi)$  أما تشخيصه الدقيق لهذه المسألة فدفعته إلى صياغة نظرية محكمة وصارمة حول الأعداد النسبية (المنطقية) وبالذات عندما واجهته مسألة المجموعة التي تحتوي على عناصر لانهائية (أي أعداد لانهائية من النقاط).

وهكذا استطاع كانتور أن يتوصل إلى المتتاليات الرتيبة أو رتب للمتواليات، فالمجموعة  $(A)$  للمتتالية الأساسية هي تلك المتتاليات للأعداد النسبية  $(a_n = a, n=1,2,3,...)$  هذه المتوالية تقترب طبعاً من معيار كوشي Cauchy الذي ينص على أن أية قيمة صغيرة محددة مهما كانت قيمتها شرط أن تكون أكبر من الصفر  $(\epsilon > 0)$  فإن القيمة المطلقة للفرق بينهما سيكون اصغر من تلك القيمة  $\epsilon$  و بالرموز  $|a-b| < \epsilon$  حيث  $\epsilon \geq 0$  وحيث  $p, q$  أعداد صحيحة .



لقد أعطت دراسات كانتور حول المتسلسلات الثلاثية بعدا آخر في مسار عمله بل تحولا أيضا في أفكاره، حيث شرع في التركيز على العلاقات الموجودة بين نقط الاتصال ناهيك عن المتسلسلات نفسها. وكانت هذه خطوة رائعة في تقدم عمله وخاصة وصفه الدقيق لمجموعة النقط اللاهائية و الذي كان التحليل الرياضي معوله الأساسي في مسألة اتصال نقط الإحداثي السيني. لذا اعتبرها كانتور بدهيات (موضوعة)، فأية نقطة على الخط المتصل يناظرها عدد، هذا العدد حقيقي - كي يمكن تميزه عن الأعداد التخيلية- وبالمثل أي عدد حقيقي تناظره نقطة على الخط المستقيم.

إن الوصف الدقيق لمفهوم اتصال نقط الخط المستقيم و ارتباطه بنسق الأعداد الحقيقية الخاضع لمبدأ " التكافؤ " أو المطابقة واحد إلى واحد يعتبر أحد إنجازات كانتور المهمة في بحوثه المنشورة عام 1872 . و لكن العوائق الرئيسة حول نظرية الأعداد الحقيقية هي وجود أعداد مثل  $\pi$  و  $\sqrt{2}$  والتي يطلق عليها الأعداد غير المنطقية أو الصماء (خلافاً للأعداد المنطقية أو النسبية التي يمكن وضعها على صورة  $a/b$  حيث  $b$  لا تساوي الصفر).

و بناء على اقتراح كارل فيرشتراس أستاذه في جامعة برلين توصل كانتور إلى أن الأعداد الصماء يمكن تمثيلها بمتوالية/ متسلسلة لانهائية من الأعداد المنطقية. فعلى سبيل المثال الجذر التربيعي للعدد اثنين 2 ويمكن وضعه على الصورة التالية:  $1, 1.4, 1.41, \dots$  وهكذا وعلى السياق



نفسه يمكن اعتبار جميع الأعداد الصماء نقاط هندسية على خط الأعداد الحقيقية مثل الأعداد المنطقية .

رغم مزايا المنحى الكانتوري المفعم بالمنطق المجرد إلا أنه يبدو شاقا على بعض الرياضيين الذين رفضوا الاستسلام إلى هذا المنطق الجديد لأنه يفترض مسبقا وجود مجموعات أو متواليات من الأعداد تحوي على عناصر لانهائية.

لم يكن كانتور آنذاك هو الوحيد الذي انكب على دراسة مسألة الاتصال بل هناك الكثير ومن بينهم زميله الرياضي الألماني ريتشارد ديدكن R.Dedkind . ففي عام 1872 نشر ديدكن تحليلا حول هذه المسألة التي اعتمدت أساسا على المجموعات اللانهائية ومن خلالها صرح ديدكن بالفكرة التي ساهم كانتور فيها مساهمة جبارة وأشاد بها. فالخط المستقيم يحتوى على نقط لانهائية فهو أكثر عددا من مجال الأعداد المنطقية (النسبية)، فإذا أخذنا مثلا توزيع النقط على جزء صغير من الخط المستقيم تناظره (تكافؤه) نقط الأعداد المذكورة أو النقط الصحيحة بغض النظر عن طول هذا الخط أو ذاك فهناك في الواقع أعداد لانهائية من النقط. وخلاصة ملاحظة ديدكن هو أنه بالرغم من كثافة النقط الصحيحة rational points على الخط نفسه فهناك مجال لحصر أعداد لانهائية من النقط الصحيحة والنقط غير الصحيحة irrational مثل 2 الذي يقع بين الأعداد الصحيحة (المنطقية) .

وهذا بالطبع يترك فراغا وهذا الفراغ سيعرقل عملية الاتصال وعندئذ لن نحصل على الاستمرارية كما سبق وصفها .



إن النصر الذي طرحه ديدكن خال من الشوائب بل يقدم لنا فهما واضحا عن فكرة الاتصال (الاستمرارية) ولكن يخفي في باطنه ملاحظات حرجة، منها إذا ما وجهنا إليه السؤال التالي: كيف تكون المجموعة اللانهائية من النقاط في المنحنى المتصل أكثر من مجموعة الأعداد اللانهائية المنطقية؟ فإنه لن يجيب عن سؤالنا هذا بل سيلزم الصمت !!

لقد كانت مساهمة كانتور تدور حول هذه المسألة التي نشرت في عام 1874 في المجلة الرياضية *Journal für die reine und angewandte Mathematik* والتي تسمى أيضا *Crelle's journal* وهي إحدى الدوريات المرموقة وذات الصيت الحسن آنذاك.

استخدم كانتور الأداة التي استعارها من جاليليو Galilio وحوّلها إلى أداة نفاذة للمقارنة في حل المتناقضات أو المفارقات التي ذكرت آنفا وذلك بمبدأ "التناظر أو التطابق" واحد إلى واحد، فهذا المبدأ يوضح لنا أيضا حجم أية مجموعة، فمثلا تعرف المجموعتين المتساويتين بالتالي : عندما تناظر عناصر المجموعة الأولى واحد إلى واحد عناصر المجموعة الأخرى يقال أنهما متساويتان .

برهن كانتور على أن الخاصية التي اعتبرها جاليليو مفارقة هي في الواقع خاصية طبيعية للمجموعات اللانهائية. وإن مجموعة الأعداد الزوجية تكافئ مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة وكذلك الأعداد الفردية، لأن عملية المطابقة مستمرة إلى الأبد-أي تطابق عناصر المجموعة الأولى مع عناصر المجموعة الأخرى دون حذف أي عنصر من المجموعتين كليهما.



استطاع كانتور أن يوضح لنا طريقة بارعة حول هذه المعضلة، حيث إن مجموعة الأعداد المنطقية تتطابق أو تكافؤ مجموعة الأعداد الصحيحة. فأي مجموعة من مجموعات النظام العددي يمكن وضعها على صورة واحد إلى واحد مع مجموعة الأعداد الكلية Whole numbers عندئذ يقال إن المجموعة قابلة للعد Denumerable set .

أثبت كانتور أنه لا يوجد تطابق بين نقط الخط المستقيم و مجموعة الأعداد الكلية أي عندما لا يتحقق شرط المطابقة يقال على أن المجموعة غير قابلة للعد Nondenumerable وبرهان هذه القضية بالغ التعقيد وتم نشره عام 1874 ولسنا بصدد ذكره هنا .

و لكن الذي يمكن أن ندلي به في هذا الخصوص هو ما جاء في أعمال كانتور لعام 1891 حيث استهل برهان تلك المسألة بوجود تطابق تكافؤ بين مجموعة الأعداد الحقيقية ومجموعة الأعداد المنطقية (النسبية) وخطوات البرهان تدور حول إثبات الافتراض نفسه الذي يؤدي إلى تناقض - أي لا يوجد تكافؤ بين المجموعتين - ومن ثم فإن الافتراض الأساسي خاطئ لذا فإن التناظر سيكون مستحيلًا .

والآن لنرى كيف صاغ كانتور نظريته التي اعتمدت أساسا على المبدأ الرياضي المعروف بالاستقراء . والنظرية في حد ذاتها بسيطة من حيث الفكرة ومعقدة وطويلة من حيث المضمون، ولنبدا جولتنا مع الأعداد الترتيبية أو المرتبة والمقصود بها هي الأعداد التي عندما نحدد الأول منها، ثم الثاني والثالث والرابع وهكذا.

هناك طريقتان للحصول على الأعداد الترتيبية:



أولاً: إذا كان العدد الترتيبي هو  $a$  فإنه يمكن الحصول على العدد الآخر الذي يليه وذلك بإضافة العدد 1 فقط ( أي  $a+1$  ).

ثانياً : إذا كان لدينا متوالية معينة ذات رتب تزايدية، فإنه يمكن إيجاد العدد الترتيبي الأخير لهذه المتوالية والذي هو أكبر من جميع الأعداد التي تسبقه، ويعبر عنه بنهاية  $a$  (  $\lim a$  ).

العدد الترتيبي الأول هو الصفر وباستخدام الطريقة الأولى نحصل على:  $0, 1, 2, 3, \dots, n$  ، وباستخدام الطريقة الثانية وذلك لإيجاد نهاية  $n$  (  $\lim n$  ) نحصل على العدد الترتيبي الأخير  $\omega$  و هو الحرف الأخير في الأبجدية اليونانية و يلفظ أوميغا، فيكون لدينا إذن  $0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots, \omega$  وباستخدام الطريقة الأولى نحصل على:  $0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots$  وباستخدام الطريقة الثانية  $\lim \omega+n$  نحصل على  $\omega+\omega$  أو  $\omega.2$  .

والسؤال الذي ربما يبدو غريباً هنا هو لم نهاية  $\omega+n$  و  $\omega+\omega$  و  $\omega$  جميعها متساوية؟ هناك في الواقع طريقة واحدة في تعريف جمع وحاصل ضرب الأعداد الترتيبية اللانهائية كما هو الحال مع الأعداد الحسابية النهائية. ويمكن شرح ذلك بإيجاز كالآتي:

يمكن الحصول على العدد الترتيبي  $a+b$  عن طريق عملية العد حتى نصل إلى  $a$  وبالمثل نعد أيضاً حتى نصل إلى  $b$  بينما العدد الترتيبي  $a.b$  يمكن إيجاده بالعد حتى  $a$  و  $b$  مضروباً في الصف، أي أن إيجاده هو الالتزام بـ  $b$  وتصور  $a$  في آن واحد ممثلاً تلك كمجموعة ترتيبية ولتكن،  $M$  و من خلال عملية التجريد يتم الحصول على العدد الترتيبي  $M=a.b$ ، أما في حالة الأعداد الترتيبية النهائية فيمكن تطبيق القاعدة التبديلية (وهي التي تنص على أن النتيجة واحدة بغض النظر عن ترتيب



المتغيرات فمثلاً عملية الجمع تبديلية ولكن عملية الطرح غير تبديلية أي  
 $a + b \neq b + a$  ولكن  $a - b \neq b - a$  و لكن في عالم اللاهائيات فهذه القاعدة  
لا طائل منها، وهكذا فإن  $1 + \omega$  هو عبارة عن  $\omega$  نفسه ولكن  $\omega + 1$   
هو عدد آخر يلي  $\omega$  .

$$\text{فمثلاً } 2.\omega = 2+2+2+\dots = \omega$$

$$\omega.2 = \omega + \omega = \omega + \omega$$

$\omega.2$  عبارة عن زوج من الاميجا معاً، الأولى بعد الأخرى والذي يعطى  
الترتيب  $\omega + \omega$  ولكن  $2.\omega$  عبارة عن اثنين أميجا واحد تلو الآخر  
الذي يعطي العدد الترتيبي المطلوب وهو  $\omega$  .

و باستخدام القاعدة الثانية المذكورة آنفاً وبلاستمرار على النحو  
نفسه نحصل على الآتي:

$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots, \omega.2, \omega.2+1, \dots$   
و واضح جداً بأن  $\lim(\omega.2+n)$  وهو  $\omega.2 + \omega$  ويطلق عليه  $\omega.3$   
وبلاستمرار نصل إلى  $\omega.n$  حيث  $n$  هو عدد محدد. باستخدام القاعدة  
الثانية نصوغ  $\lim(\omega.n)$  وهى عبارة عن طبق الأصل  $\omega$  أي  $\omega.\omega$   
وتعرف ايضاً  $\omega$  وهكذا نصل إلى  $\omega^2, \omega^3, \omega^4, \dots, \omega^\omega$  و  $\omega^\omega$  ليس إلا  
البداية ويطلق عليه عادة  $\varepsilon$  ويلفظ إبسلون صفر  $\varepsilon$  وهو أحد حروف  
الأبجدية اليونانية .

و يمكن إيجاز النظرية بالصورة الآتية :

$$0, 1, 2, \dots, n, \omega, \omega+1, \dots, \omega+n, \dots, \omega.2, \omega.2+1, \dots, \omega.3, \omega.3+1, \dots, \omega m + m, \dots, \omega^2 + \omega m + m, \dots, \omega^2 n, \dots, \omega^3, \dots, \omega^n, \dots, \omega^n m_n + \omega^{n-1} m_{n-1} + \dots, \omega^\omega, \dots, \omega^\omega + n, \dots, \omega^{\omega+1}, \dots, (\omega^\omega)^n, \dots, (\omega^\omega)^\omega, \dots, ((\omega^\omega)^\omega)^\omega, \dots$$



وبعد هذه الأعداد الترتيبية نصل إلى

$$\varepsilon_0, \varepsilon_{0+1}, \dots, \varepsilon_0 + \omega, \dots, \varepsilon_0 + \omega.2, \dots, \varepsilon_0 + \omega^2, \dots, \\ \varepsilon_0, \omega^\omega, \dots, \varepsilon_0.2, \dots, \varepsilon_0\omega, \dots, \varepsilon_0\omega^\omega, \dots, \varepsilon_0^2, \dots$$

والآن لنأخذ الأعداد الكاردنالية Cardina (الأصلانية) التي تتجاوز الأعداد المذكورة سابقا، نذكر أولها العدد  $\aleph_1$  الذي يمثل رتبة من الأعداد اللانهائية يكون أكبر من  $\omega$  وأكبر أيضا من  $\omega + \omega$  بينما  $\aleph_0$  هو  $\omega$  ويعرف العدد الأصلي عادة بالآتي: يقال لأي عددين رتبيين A و B لهما نفس "الأصلانية" إذا كان هناك تناظر واحد-إلى-واحد من A إلى B.

و  $\aleph_1$  هو أول عدد ترتيبي (رتبي) ذو أصلانية أكبر من  $\omega$  ولا يمكن لعناصره أن تناظر واحد إلى واحد عناصر  $\omega$ . وبصورة عامة يقال للعدد الرتبي A عدد أصلاي إذا لا توجد له نفس الأصلانية .

أما بالنسبة لفكرة العدد الأصلي (القياسي) " لا يمكن تعريفها بالنسبة للمجموعات غير المنتهية ولكن يمكن إدراكها عن طريق الحس والإحساس، ألها علاقة تكافؤ والتي بدورها تقسم المجموعات إلى صفوف تكافؤ كل صف له مقياس معين لا نستطيع تعريفه ولكن ندرك أن مقياس المجموعة N يختلف عن مقياس المجموعة R ولذلك يمكن وصف فكرة العدد القياسي بالفرضية التالية: أولا، لكل مجموعة A يوجد عدد  $\alpha$  يسمى العدد القياسي للمجموعة A ويرمز له  $\alpha = |A|$  ويسمى كذلك مقياس المجموعة A " .

ثانيا:  $A = \emptyset \Leftrightarrow |A| = 0$  و إذا كانت  $A = N$  بحيث أن  $n \in N$  فإن  $|N| = n$  أي أن مقياس المجموعة N هو عدد عناصرها n.



ثالثا: إذا كانت A و B أي مجموعتين فإن  $A \sim B$   $|A| = |B|$  وبصورة عامة فإن جميع الأعداد الطبيعية هي أصلانية في حد ذاتها، فهذه الأعداد تسمى أعداد أصلانية منتهية، لأنه توجد أعداد أخرى غير منتهية وتسمى بالأعداد الموعلة أو ما وراء المنتهية<sup>3</sup>. وب نفس الطريقة السابقة نحصل على رتب من ألف ، أولها  $\aleph_0$  و ثانيها  $\aleph_1$  وهكذا نحصل على أنواع كثيرة مرتبة ترتيبا تصاعديا :

$$\aleph_0 \ \aleph_1 \ \aleph_3 \qquad \aleph_\omega, \ \aleph_{\omega H}, \ \aleph_{\omega^\omega} \qquad \aleph_{\Xi 1}, \dots \aleph_{\Xi \omega}$$

و يمكن أن نتصور عددا آخر هو  $\theta$  حيث  $\theta = \aleph_\theta$

والسؤال المطروح هنا، هل توجد نهاية لهذه الأعداد؟ الإجابة بالنفي طبعاً لأننا في عالم اللانهائيات حيث توجد هناك في نهاية المطاف اللانهائية المطلقة والتي يعبر عنها بالرمز اليوناني  $\Omega$  وهذه بالتأكيد يصعب تصورها ووصفها أيضا .

وهذه اللانهائية هي مطلقة بطبيعتها ولا يمكن إدراكها أو معرفتها حسياً أو منطقياً، وبوجه عام هي اللانهائية التي يتحدث عنها غالبية الناس أي عبارة عن شيء ليست له حدود ولا يمكن سبر غوره .

وسؤال آخر، يخطر على بالنا، هل المجموعات اللانهائية متساوية؟ وهل كل المجموعات اللانهائية ذات حجم واحد ؟

الإجابة بالتأكيد ستكون غريبة جداً، لأنها ستخلق بنا إلى منطق آخر قد لا يتقبله عامة الناس لصعوبة تصوره . فهناك في الواقع رتب بل درجات متسلسلة من اللانهائيات، الأولى أصغر حجماً من الثانية والثانية أصغر من الثالثة وهكذا  $\aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3$

<sup>3</sup> د.محمود كنتكت: نظرية المجموعات



وهذا التصور يقودنا إلى أن اللاهائيات جميعها غير متساوية خلافا لما كان يعتقد به قبل كانتور، فهذا المفهوم بحد ذاته ضربة قاصمة لكل الأفكار الأرسطية وما تبعها .

أما حساب الأعداد اللاهائية فهو كالتالي بالنسبة إلى الجمع والضرب:

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$$

$$\aleph_0 + n = \aleph_0 = n + \aleph_0$$

$$\aleph_0^{n+1} = \aleph_0^2, \quad \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_0$$

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

$$\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$$

فمجموعة الأعداد الموجبة و مجموعة الأعداد السالبة و مجموعة الأعداد النسبية و مجموعة الأعداد الأولية جميعها متساوية أي ذات حجم واحد هو  $\aleph_0$  .

ولقد برهن كانتور أن مجموعة الأعداد الحقيقية هي بالتأكيد غير متساوية  $\aleph_0$  بل أكبر حجما منها. فهل الأمر كذلك مع الأعداد اللاهائية الأخرى ؟ بالرغم من جميع المحاولات التي بذلها كانتور من أجل إيجاد جوابٍ مؤكدٍ لهذه المسألة إلا أن الأمر قاده أخيراً أن يطلق على تلك "مسألة الاتصال" أو "فرضية الاتصال" "Continuum Hypothesis". وتنص الفرضية على أن مجموعة الأعداد الطبيعية هي ذات عدد أصلاي  $\aleph_0$  وقوتها (قوة المجموعة) تساوي  $\aleph_0$  ويرمز لها ( C ) وهو العدد الأصلاي لمجموعة الأعداد الحقيقية، وتقترح هذه الفرضية أيضا على أنه لا يوجد عدد أصلاي لانهائي بين  $\aleph_0$  و C .



و هناك تعميم حول فرضية الاتصال وهو أن العدد الأصلي  $\aleph_0$  يعتبر أصغر الأعداد الأصلانية وأن  $\aleph_1$  هو عدد تال أي أكبر من  $\aleph_0$  وهكذا كل من  $\aleph_0$  و  $\aleph_1$  يرتبطان بالصيغة الرياضية  $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$  .  
و فكرة العدد 2 جاءت كالتالي:

لنفرض مجموعة تتكون من عنصرين اثنين  $\{a, b\}$  فإنه يمكن إيجاد أربع مجموعات جزئية من ضمنها المجموعة الخالية  $\emptyset$  وتكون جميعها  $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$  وإذا كانت المجموعة تتكون من ثلاثة عناصر  $\{a, b, c\}$  فإنه يمكن إيجاد مجموعات جزئية من المجموعة نفسها ويكون عددها عندئذ ثمانية مجموعات وهي  $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$  حيث يمثل العدد اثنين أساسا لهما وبالمثل لأية مجموعة أخرى. ومن هذا الأساس برهن كانتور على وجود رتب من اللانهائيات .

لقد كان مفهوم "قوة المجموعة" إحدى المسائل التي شغلت بال كانتور كثيرا وقادته إلى صياغة فرضيتين حول طبيعة المادة والأثير ومن هذا المنطلق استعار المصطلح الليبتزي Leibnizian وطرح السؤالين التاليين: ما هي قوة المجموعة Machtigkeit لجميع المونودات Monads ( ذرات المادة عند ليبتز ) المادية ؟ و ما هي قوة المجموعة لجميع المونودات التي تكون أثيرا ؟

أجاب كانتور بالنسبة إلى مجموعة المونودات المادية وهي القوة الأولى أما المونودات الأثرية فهي القوة الثانية وزعم أيضا بأن هناك عدة أسباب تدعم هذه النظرية ولكنه لم يفصح عن واحدا منها آنذاك بل اكتفى على أن نظريات اي لمجموعات للأعداد الموهلة أو ما بعد المنتهي



Transfinite يمكن تطبيقها وستكون ذات أهمية في الحقلين الرياضي والفيزيائي ومن ثم ستعالج قضايا كثيرة حول الظواهر الفيزيائية.

لقد وجد كانتور موضوعية مشابهة للأعداد الموغلة في العالم المادي، فهذا التحقيق تم إنجازه على أساس اللاهوائية الحقيقية لمجموعات المونودات الأثرية أو العينية (المادية) التي تكون هذه الأعداد انعكاساً لها و إن تطبيقهما أي الأعداد الموغلة في العالم الطبيعي هو إثبات مباشر لوجودها الحقيقي.

وهناك منحى آخر استخدم فيه منطق كرونكر وهو كون ما تتمتع الأعداد الصحيحة من واقع ملموس فالأمر كذلك بالنسبة لتلك الأعداد . وهناك سبب آخر دفع كانتور ليحصن أعداد الموغلة من منطلق المجموعات اللاهوائية المطلقة، بمعنى آخر متى تم وجود المطلق لمجموعات اللاهوائية، فإن هذه الأعداد ليست إلا نتيجة مباشرة لها ومتى قبلنا بوجود المجموعات اللاهوائية فإن مسألة الأعداد الموغلة ستكون هي الأخرى نتيجة لها وهكذا أعاد كانتور تفحصها أكثر من مرة حتى توصل أخيراً إلى أن هذه الأعداد ليست إلا أعداداً لانسبية جديدة أي أن مصيرها كالأعداد الصماء ( غير النسبية أو غير المنطقية).

و كما يقول "إن الأعداد الموغلة في غاية الأمر أعداد لا نسبية جديدة وأن الأعداد الصماء النهائية مشابهة لها تماماً-الأعداد الموغلة-، وربما اقترح من حيث المبدأ بأنها شبيهة بالطريقة التي وصفتها أنفا في تعريف الأعداد الموغلة وأن المرء هنا يؤكد إنها ترتبط ارتباطاً حميماً بالأعداد الصماء النهائية فهي متشابهة تماماً في معظم خصائصها الجوهرية" وهكذا أعاد كانتور الاعتبار الموضوعي لهذه الأعداد .



فقد أعلن ديفيد هلبرت في المؤتمر العالمي للرياضيات عام 1900 الذي عقد في باريس أن هذه المعضلة -الأعداد الموهلة - لا بد وأن تكون ضمن أوليات المسائل التي يجب مناقشتها في هذا المؤتمر بل يجب أن تكون مقدمة على غيرها لأنه أي هلبرت كان يرى فيها تحديا كبيرا لأهميتها القصوى.

ثمة نتائج إيجابية توصل إليها الرياضي والمنطقي كورت جودل Kurt Gödel في عام 1938 مستخدما أسلوبا جديدا في المنطق الرياضي معتمدا على مسلمات زيرميلو - فرنكل Zermelo-Frankel وهو أنه من المحال كليا إثبات أن مجموعة الأعداد الحقيقية لا تساوي  $\aleph_1$ ، وهذا لم يعط حلا كاملا لأن المسلمات وحدها لا تكفي بالرغم من وجود نتائج تبرهن صحة وصدق فرضية الاتصال (سيتم مناقشة هذا الجانب في الفصل اللاحق).







## الفصل الرابع

اللانهاية بعد كانتور أو اللاكانتورية







## اللانهاية بعد كانتور او اللاكانتورية

" لقد جعلتني لانهايا، تلك هي لنتك "

طاغور

يحاول الباحث في هذا الفصل أن يغطي أولاً مسألة "المفارقات" Paradoxes أو "المحيرات" (التناقض الظاهري) أي المتناقضات الموجودة في نظرية المجموعات ثم يلقي الضوء على التحليل الرياضي اللامعياري Non-standard analysis وهو الفرع الذي شق طريقه الرياضي الأمريكي إبراهيم ربنسون E.Roninson في ستينيات هذا القرن وتسمى نظريته هذه باللاكانتورية باعتبارها تجديداً وسداً لثغرات الكانتورية التي أهملت بل تجاهلت مفهوم اللانهاية في الصغر .

في الوقت الذي أرادت أن تكون الهندسة "الاقليدية" (هندسة بولاي - لبوتشفسكي) رداً وتصحيحاً لبعض مفاهيم الهندسة الإقليدية\* ، هذه الهندسة التي سيطرت على الفكر الرياضي والفلسفي أكثر من ألفي عام ولا تزال تتمتع بتطبيقات شتى. وكما جاءت اللاقليدية ثورة على المفاهيم الاقليدية، هكذا أرادت أن تكون اللاكانتورية التي تبنّت التحليل اللامعياري (اللاقياسي) عوضاً عن التحليل المعياري الكلاسيكي الشائع. أما

---

\* الاقليدية: هي نسبة إلى الرياضي اليوناني الشهير أفليدس 300ق.م تقريباً صاحب كتاب "الأصول" الذي يعتبر بحق أحد المصادر الأساسية للعلم الرياضي.



جنود هذا التحليل فيمتد إلى أفكار الرياضي الألماني الشهير لينستر الذي توصل إلى علم حساب التفاضل والتكامل بصورة مستقلة عن إسحاق نيوتن .

لقد وصف هـلبرت وهو من كبار الرياضيين اللذين عشقوا النظرية الكانتورية بأنها فردوس رياضي يجب الاستمتاع به بل والعيش فيه، وليس باستطاعة أحد أن يسوقنا عنه، وكون أي فردوس لا بد وأن تعيش فيه الثعابين والشرائطين لذا يجب التخلص من هذه الآفات كي يظل الفردوس نعيماً، فالمفارقات التي سوف نتحدث عنها هي بمثابة تلك الثعابين التي يجب التخلص منها، أي بمعنى آخر إيجاد حلول لتلك المتناقضات .

إن أحد تلك الاختلافات التي واجهت رياضيي الفردوس هي متناقضة بورالي-فورتي Burali-Forti (1897) والثانية متناقضة فريجه-رسل Frege-Russell (1902) وأخيراً بالكذبة الإغريقية القديمة التي يطلق عليها الكذب Liar للبوجنسكي Bochenski (1962) .

لقد كان الفلاسفة قلقون جداً حول طبيعة المتناقضات أو المفارقات وبالتحديد حول مسألة إلغاء (إبطال) اللاهائية وذلك منذ الفترة ما قبل السقراطية التي بدأت عند خوضهم لمتناقضات اللاهائية المتعددة . وكانت الحلول التي قدمها أرسطو، هو الرفض المطلق لللاهائية الحقيقية، وكذلك بالنسبة لرجال اللاهوت الذين اعتبروها تحدياً مباشراً لطبيعة الله اللامتناهية المطلقة.



كان أعتقاد كانتور حول الذين رفضوا فكرة اللانهائية في الرياضيات والفلسفة واللاهوت ناجماً عن خطأ شائع عند أرسطو وكذلك المدرسين الذين التصقوا بمبادئه ومنهجيه بمثابة نبراسا يستدلون به حقائقهم. وخلاصة الجدل كان يدور حول "إلغاء العدد" Annihilation، فعلى سبيل المثال: العددين  $A$  و  $B$  كلاهما أكبر من الصفر و مجموعهما  $A+B < B$  ,  $A+B > A$  ، فإذا كان  $B$  لانهائياً بغض النظر عن ماهيته، فإن  $A+\infty=\infty$  وهذا في حد ذاته نقيض لقاعدة الجمع الأساسية، لذا كان التصور حول اللانهائية إلغاءً بل إبطالاً لعدد لانهائي محدد، من هذا المنطلق رفضت الأعداد اللانهائية باعتبارها أعدادا غير متناسقة لقدرة على إزالة الأعداد النهائية .

كان احتجاج كانتور حول هذه المسألة، بأن الأعداد اللانهائية لا يجب بالضرورة أن تتمتع بنفس خصائص الأعداد الحسابية النهائية، حيث برهن أن الأعداد اللانهائية يجب تطويعها أو تهذيبها بالأعداد النهائية . والفارق الذي أدخله كانتور بين تلك الأعداد هو عدم حدوث عملية الالغاء، أى بين  $\omega$  و  $\omega+1$  يمكن إضافة الأعداد النهائية إلى تلك اللانهائية دون حدوث إلغاء للعدد النهائي، لذا كان أرسطو مخطئاً في نظر كانتور من هذه الناحية .

و هكذا أخذ كانتور على عاتقه أعمال كبار مفكري القرن التاسع عشر، وأقترح على المرء الذي يريد سير عالم اللانهائيات عليه الرجوع



والاستفادة من أعمال كبار الفلاسفة أمثال لوك Lock وديكارت وسبينوزا وليبنتز .

وكانت صرخة كانتور الفلسفية، هل اللاهائية سؤال مستحيل ؟ وكيف تكون اللاهائية محالة؟ بالنسبة إلى المفكرين مثل سبينوزا وليبنتز، فاللاهائية بمعناها المطلق لا يمكن إدراكها كخالق نفسه، وأية محاولة لإرساء الأسس لتحديدها دون الآخذ بالاعتبار التصور الجهدي (الممكن) فأمر مصيره الفشل .

لقد كان كانتور معجباً بمحاولات بولزانو حول إثبات وشرح مفارقات اللاهائية المتعددة، واستحدثه فكرة اللاهائية الحقيقية لا تحدث أي تناقض في الرياضيات. وكان كتاب بولزانو "مفارقات اللاهائية" Paradoxien des Unendlichen الصادر في عام 1821 موضع ثناء وتبجيل لكانتور لكلا الحقلين الفلسفي والرياضي، حيث تعتبر السمات الرئيسة في أعمال بولزانو هي الحد الفاصل بين اللاهائيتين الجهدية والحقيقية .

لقد شرح كانتور تفسيراته حول المتناقضات في رسائله المتبادلة مع ديدكن في صيف 1899، وكانت الأولى التي كتبها في الثالث من أغسطس ما هي إلا تكراراً لكل ما ورد في كتابه "الأسس" وهو أن الخطوات المؤلفة من  $\aleph$  وأعداد الفئات التي تناظرها تبقى بالطبع دون حدود، أي لاهائية. ولكن كانتور لم يأخذ بعين الاعتبار



وعندما أعدد اعتبار تلك المنظومة تأكد تماماً على أن المجموعة يجب أن تكون مرتبة تماماً وأن  $\Omega$  يجب أن يناظرها نمط مرتب أيضاً، فإذا كانت  $\Omega$  من نمط  $\delta$ ، فلا بد أن تكون أكبر نمطاً من  $\Omega$  وحيث إنها تحتوي على جميع الأنماط المرتبة، فقد تواجهنا صعوبة عندما نقول أن  $\delta < \delta$ .

هناك شيء متأصل وغير مجاز في اعتبار  $\Omega$  مجموعة متماسكة (متساوقة). لقد وضع كانتور موقفه تجاه ذلك في النظرية الآتية: "إن منظومة  $\Omega$  لجميع الأعداد المرتبة هي لانهائية تماماً ومجموعة غير متماسكة" وبالمثل بالنسبة لمنظومة  $\aleph_1$  وهي مجموعة الأعداد الموعلة القياسية (الأصلانية): "تتكون منظومة من حثوي على منظومة شبيهة  $\Omega$  أي لانهائية وغير متماسكة.

والسؤال المطروح هنا هل هناك عدد قياسي خارج المنظومة  $\Omega$ ، بتعبير آخر هل هناك مجموعة قوتها ليست ألفاً  $\aleph$  ؟ لقد أجاب كانتور بالنفي طبعاً.

لقد كان البرهان الذي تقدم به كونك J.C.Konig في المؤتمر العالمي الثالث للرياضيات الذي عقد في هايدلبرج عام 1904 أحد تلك المفاجآت الكبيرة التي واجهها كانتور في حياته. كان موضوع برهانه الذي استهل فيه :

---

<sup>1</sup> ويلفظ تاف وهو أحد حروف الأبجدية العبرية.



" أن قوة الاستمرارية لا يمكن أن تكون ألفاً  $\aleph$  مستخدماً في ذلك نتيجة بيرنشتاين Bernstein وبرهن زيرميلو فيما بعد خطأ كونك وبالذات عندما اعتمد على نتيجة بيرنشتاين الخاطئة وهذا ما تنبأ به كانتور وبه يعتبر اكتشاف زيرميلو بحق تخفيفاً من حدة القبض الذي انتاب كانتور، وبات الأمر أخيراً على الخروج من هذا المأزق اعتباراً أن أية مجموعة يجب أن تكون مرتبة تماماً .

### 1. مفارقات / متناقضات النظرية الكانتورية :

تقول نظرية كانتور: " إن الأعداد المرتبة اللامتناهية يمكن أن ترتب ترتيباً تصاعدياً بحيث أنه من بين كل عددين منهما أيّاً كانا يوجد دائماً عدد أقل من الآخر وأن أكبر الأعداد المرتبة اللامتناهية هو آخر سلسلة تلك الأعداد.

يقول فوري: إذا أخذنا هذا العدد الأخير طرفاً وحيداً في المقارنة فلا بد أن يكون وفقاً للنظرية نفسها- باعتباره عدداً مرتباً لامتناهياً- أقل من عدد آخر لا نعلمه، إذن فأكثر الأعداد المرتبة اللامتناهية ليس أكبر الأعداد المرتبة اللامتناهية، وهذا تناقض في هذه النظرية".

تقول نظرية كانتور: " في العدد الأساسي المنتهي كل عدد منته باعتباره مجموعة set أو فئة class لا يشتمل على ذاته كجزء منها.



و يقول رسل: إنه يمكن بيان أن عدد الأعداد المنتهية كلها (أي مجموعة كل المجاميع العددية) هو في آن واحد لا يشتمل ذاته ويشتمل ذاته أيضا كجزء من ذاته، وهذا تناقض .

فهو لا يشتمل على ذاته لأنه أكبرها وفقا للنظرية ولكنه أيضا يشتمل على ذاته باعتباره مجموعة كغيره من المجاميع أي إحدى المجاميع التي لا تشتمل على ذاتها <sup>2</sup> .

ويوضح رسل مفارقتها بالمثل الآتي: هناك حلاق في القرية يقوم بحلق ذقون جميع الأفراد الذين لا يحلقون ذقونهم، والحلاق نفسه هو أحد أفراد القرية فهل يستطيع أن يحلق ذقنه أم لا؟ فإذا تم ذلك فقد أخل بالشرط الذي ينص على أنه يحلق الذين لا يحلقون وإذا لم يحلق ذقنه يخل أيضا لأنه لا بد أن يحلق ذقون جميع الذين لا يحلقون وهنا تبرز المشكلة !!! .

باختصار توصل رسل إلى مفارقتها بالصياغة المنطقية وهي هل هناك إمكان وجود مجموعة تنتمي إلى نفسها وفي الوقت نفسه لا تنتمي إليها ؟

هناك نوعان من اللانهائية، الأول هو لانهائية الأعداد الطبيعية (أو أية مجموعات أخرى تكافؤها) ويطلق على هذا النوع  $\aleph_0$  المجموعات والتي يكون عددها الأصلي (القياسي) هو  $\aleph_0$  وتكون المجموعة في

---

<sup>2</sup> د. محمد الفندي: فلسفة الرياضة، ص 116.



هذه الحالة قابلة للعد ( فالمجموعة القابلة للعد هي تلك التي تناظر/تطابق واحد إلى واحد مجموعة الأعداد الطبيعية)، أما النوع الآخر فهو الذي يمكن تمثيله بجزء من الخط المستقيم أو أي خط آخر والعدد الأصلي في هذه الحالة هو C وعادة يرمز هذا للاتصال أو الاستمرارية، فأى خط مستقيم يكون عدده الأصلي هو C والأمر ينطبق أيضا على أي شكل آخر كالمستطيل في المستوى أو المكعب في الفراغ وحتى الفراغات (الفضاءات) اللامحدودة ذات الإحداثيات النونية .

لقد أسس أرنست زيرميلو E.Zermelo في عام 1908 نظرية المجموعة البديهية (الاكسيوماتية) متخذا في ذلك مجموعة من البديهيات شبيهة بخصائص النقاط والخطوط المستقيمة التي تحدث عنها أقليدس. أعتبر زيرميلو "المجموعة" شيئا غير محدد وغير معرف ولكنه يخضع لبديهيات معطاة .

"تزعم زيرميلو حركة لتقويم ما أعوج من نظرية المجاميع، وذلك بتأسيسها على مسلمات،.. وقد حاول هذا التيار تحاشي النقائص وذلك بإنشاء النظرية على أساس مسلمات تنتجها دون تناقض بين قضاياها فاستخراج زيرميلو مثلاً المسلمات المتضمنة لها عند كانتور



وأضاف إليها مسلمتين, مسلمة الانتقاء Selection ومسلمة الرد Reducibility<sup>2</sup>.

تنص مثلا مسلمة الرد: أية دالة من رتبة ونمط ما، تناظرها دالة أخرى من الرتبة الأولى ونفس النمط حيث تكافؤها شكليا. (يقال للدالتين بأتهما متكافئتين شكليا عندما تكون كلتهما صحيحتين أو كلتهما غير صحيحتين).

لنتحدث مثلا عن "بديهية الاختيار" Axiom of Choice و تنص على: إذا كانت  $\alpha$  هي مجموعة مكونة من مجموعات غير خالية  $A, B, C, \dots$  فإنه توجد مجموعة فلتكن  $Z$  تحتوي على عنصر واحد على الأقل من تلك المجموعات.

ورغم الدور الأساسي الذي تلعبه هذه البديهية في نظرية المجموعات فإن بعض الرياضيين اتخذوا موقفا سلبيا تجاهها بل أصر البعض على نبذها بقدر المستطاع ويعزو السبب في ذلك إلى عدم التمكن من إثبات صحتها أو خطئها .

ففي عام 1938 عالج كورت جودل K.Godel المعروف "بنظرية اللااكتمال" حيث قام بتمحيص هذه البديهية تمحيصا دقيقا وتبين له بأن الخلل المزعوم ليس في بديهية الاختيار نفسها بل في جميع البديهيات الأخرى، فهي بالتالي لا تختلف جذريا عن البديهيات

---

<sup>2</sup> المرجع نفسه ، ص 122



المتعارف عليها في نظرية المجموعات منوها إلى أن بديهية الاختيار ليست بدرجة من الخطورة إذا ما قورنت بالبديهيات الأخرى ما دام التناقض موجودا في نظرية المجموعات القياسية (المعيارية) فالأمر كذلك بالنسبة لنظرية المجموعات المقيدة فالتناقض كامن فيها.

تنص فرضية الاتصال الكانتورية على أنه ليس ثمة وجود لعدد أصلائي لانهائي أكبر من  $\aleph$  أو أصغر من  $c$  وبالرموز، فإذا كان  $\alpha$  عددا أصلائيا فإن  $\alpha \nmid \aleph_1$  أو  $\alpha \nmid \aleph_0$

لقد برهن جودل أيضا أنه يمكن اتخاذ فرضية الاتصال كبديهية إضافية لنظرية المجموعات، فالإضافة إلى فرضية الاتصال والمجموعة المقيدة يؤديان إلى تناقض، بمعنى آخر أن التناقض كامن في نظرية المجموعات المقيدة والوصول إلى مثل هذا الاعتراف يعني إيجاد نصف حل لمعضلة كانتور، أي ليس برهانا على الفرضية، ولكنه برهان على عدم دحضها ومن وجهة نظر رياضي القرن العشرين كل من فرضية الاتصال والمجموعة المقيدة قابلا للتطبيق على العالم الفيزيائي وكلتيهما متناسقان .

فالحقيقة التي توصل إليها جودل هي أن فرضية الاتصال لا يمكن دحضها وبالمثل لا يمكن إثباتها، رغم أن طموح جودل هو صياغة نموذج لنظرية المجموعات المقيدة التي يمكن من خلاله البرهنة أن



بدھية الاختبار وفرضية الاتصال ليستا إلا وجهين لعملة واحدة، نظريتان فحسب.

ففى عام 1963 تقدم شاب يبلغ من العمر التاسعة والعشرين من جامعة ستانفورد الأمريكية باقتراح حول مسألة الاتصال ولم تكن طبيعة الاقتراح أو الحل ثورياً فحسب بل الأسلوب الذي عولجت فيه المسألة كان جديداً تماماً منحت له جائزة فيلد Field العالمية عام 1966. فهذه الجائزة هي أعلى تنويج علمي يكرم به الرياضيون وتعادل هذه تماماً جائزة نوبل في الحقول الأخرى. كان هذا الشاب الرياضى الأمريكى بول كوهن Paul Cohen .

لقد كان الرياضيون قبل كوهن يواجهون مشكلة شاقة، وهى هل الجمل الرياضية صادقة أو غير صادقة؟ للتخلص من هذا المأزق، هناك احتمالان إما إثبات صحتها أو إثبات خطئها؟

ولكن الاقتراح الذي تقدم به كوهن الشاب حول هذه المسألة هو أن هناك جمل رياضية لا يمكن أن تكون خاطئة وكذلك لا يمكن أن تكون صادقة أي نحن في موقف لا يمكن البت في أمرها تبقى "غير قابلة لأتخاذ القرار حولها" Undecideable . والصعوبة كما تبدو في طبيعة المادة الرياضية وعدم التصاقها المباشر بالواقع المحسوس، فهناك بعض المفاهيم المجردة مثل "النقطة" و "الخط المستقيم" و "المستوي" . الخ ليس لها نظير في الواقع وفكرة "العدد"



أيضاً إحدى تلك المفاهيم. فمثلاً التجريد الآحادي يقودنا إلى العدد "واحد" والتجريد الثنائي يقودنا إلى العدد اثنين وكذلك بالنسبة للأعداد الأخرى، ففي العالم المحسوس ليس هناك عدد اثنان أو ثلاثة ولكن جذور هذه الأعداد موجود في العالم الواقعي. و كما يقول الرياضي والمنطقي الألماني فريجه G.Frege " إن قوانين العدد ليست هي قوانين الطبيعة أهما قوانين الطبيعة".

### التحليل اللامعيارى (اللاقياسى):

والآن لنلقى الضوء على التحليل اللامعيارى الذى تبلور على يد الرياضي والمنطقي الأمريكى أبراهام روبنسون والذى فى حد ذاته يمثل أسلوباً جديداً فى دراسة التحليل الرياضى وأداة أخرى يعالج بها، وتمتد جذور هذا التحليل إلى الرياضى والفيلسوف الألماني لينتز Leibniz. لقد حاول لينتز تحليل "الموقع" أو التموقع اللحظى لسلوك الدوال، تلك الظاهرة التى تأخذ حيزاً عند نقطة واحدة فى الفضاء أو الزمن (لقد كانت مسائلنا الفضاء والزمن منفصلتين آنذاك، حتى جاءت النسبية ودمجتهما فى قالب واحد و هو الزمكان)، و ابتكر لنا لينتز نوعاً جديداً من الأعداد المسماة "باللانهاية فى الصغر" Infinitely small وهى الأعداد التى تكون أصغر من القيمة المطلقة لأي عدد موجب صحيح يختلف عن الصفر. وأطلق عليها الأعداد اللاصفرية أو المتناهية فى الصغر. ولقد برزت هذه الأعداد عند تشيد ليبنتز



لحساب التفاضل والتكامل واستحدث مفاهيم جديدة من أجل اكتمال رائعته ومنها مفهوم المشتقة .

تعرف مشتقة الدالة في الحساب التفاضلي بالآتي:  
حيث  $f(x)=f(x+dx)f(x)/dx$  هو مقدار لاصفري بل متناه في الصغر.  
والمتناهيات في الصغر عبارة عن كميات يمكن إهمالها إذا ما قورنت بالأعداد الموجبة الصحيحة ولا شك أن هذه المتناهيات تبدو غير عادية ولكنها تسلك سلوك الأعداد الصحيحة العادية، ورغم أن وضعها ليس ملائماً فقد أطلق عليها لينتزر "خيال خصب". لقد نبذها نيوتن و فضل تعريف مشتقة الدالة مستخدماً السرعة اللحظية.

أما الرياضي السويسري لاهوبتل  $L^{\text{Hopital}}$  الذي كتب مقررأ دراسياً في حساب التفاضل و التكامل كان هو الآخر متحمساً و معترفاً بوجود هذه المتناهيات في الصغر، إلا أن العديد من الرياضيين المرموقين استخدموها في دراساتهم وحاولوا حل اهتمامهم تشيد البناء المنطقي للنهايات في الصغر، ونذكر منهم على سبيل المثال لأكرانج وودالمبرت وبولزانو وعلى رأسهم كوشي.

لقد كان تصور كوشي حول المتناهيات في الصغر باعتبارها كميات متغيرة تقترب إلى الصفر، هذا التصور قاده إلى مفهوم "النهاية"  $Limit$ . وبصورة أوضح عندما يكون الفرق بين الكميّتين  $a$  و  $b$  متناهياً في الصغر. وبالرموز  $a-b$ . فإذا كانت  $\varepsilon$  متناهية في الصغر



وموجة فإن مقلوبها  $1/\varepsilon$  يكون أكبر من أي عدد صحيح ويكون  $1/\varepsilon$  بين أي عددين صحيحين لانهائيين لا معياريين هما  $N$  و  $N+1$  حيث  $1/\varepsilon=N$ .

أما وجهة نظر كانتور حول مسألة اللامتناهيات في الصغر فتبرز من إصراره الدائم أن الأعداد الموعلة (ما وراء المنتهي) تبرز تلقائيا وضروريا من العناصر التي تؤلف مجموعات، وكان مقتنعا تماما بالخصائص التي قدمها حول طبيعة اللانهائية رغم ما تحمله هذه الخصائص من بنيتها الممكنة، أي صورتها الجهدية. لذا انعكس هذا التصور على موقفه في تمثيل مجموعة تلك الأعداد بأنها حتمية وكاملة و غير قابلة إلى أي رأي آخر أو تفسيرات معارضة.

من هذا المنطلق لم ترحب أعمال الرياضي الإيطالي فيرنوسيه G.Vernose لأنها عاجلت أعمال كانتور من منطلق آخر أي الزاوية التي كان يعتبرها كانتور هجوما على نظريته، تلك هي فكرة اللانهائية في الصغر و التي يشبهها كانتور بأنها " كوليرا أبتلت بها الرياضيات " هذه الكوليرا التي بدأت في ألمانيا من خلال أعمال توميه ودي بوس ريموند وشتولس، حيث رفض كانتور دور اللانهائية في الصغر وبالتحديد في طبيعة الاستمرارية وذلك في عام 1886 عندما كان في محاولة جادة لصوغ برهانا كاملا لدحض اللانهائية في الصغر، وعلى حد قوله أي، إن قبول اللانهائية في الصغر يعني بالضرورة عدم



اكتمال نظريته حول الأعداد، بمعنى آخر قبول أعمال أولئك الرياضيين يعنى الرفض المطلق لأعماله لذا أصر حتى نهاية حياته بعدم الاعتراف بأعمال فيرنوسيه .

اعتبر كانتور الأعداد الأصلانية (القياسية) والأنماط الرتبية جميعها امتداداً لمفهوم العدد نفسه وزعم أيضاً أن فشل فيرنوسيه في فهم الأعداد الموغلة سببه هو صياغة نوع آخر من اللانهائيات واشاد على إنها استنتاجات خاطئة لكونها لا تتوافق مع نظريته. وصرح أيضاً بأن أية نظرية عن اللانهائيات يجب أن تتوافق وأن لا تخرج عن مجال نظرية الأعداد الموغلة وخلافاً لذلك تعتبر باطلة .

ونضيف إلى الخلفية التاريخية هذه دعماً رياضياً وأصدق ما نستهل به هو خاصية أرشميدس التي تنص على الآتي:

أي عدد صغير جداً (أصغر مما يتصور) لا يساوي الصفر طبعاً، فإن الإضافات المتكررة له عدة مرات يصبح كبيراً جداً فاللانهائية في الصفر عند أرشميدس هو عدد أكبر من الصفر ولكنه يظل أصغر من الوحدة/الواحد (  $a=0$  و  $\Sigma a < 1$  )

لقد أنطلق روبنسون من النقيضة التي تركها لينتزر وهي اللانهائية في الصفر والتي هي عبارة عن أعداد غير متناهية في الصغر أما موجبة أو سالبة ولكنها تحمل خصائص الأعداد العادية. والسؤال المطروح هنا، إذا كانت اللانهائية في الصفر لها نفس خصائص



الأعداد العادية، فكيف تكون موجبة وأصغر من أي عدد موجب عادي؟ فهذا هو التناقض بعينه.

لقد أستخدم روبنسون اللغة الشكلية في حل هذه المتناقضات وبرهن على كيفية إنشاء نسق يحتوي على اللانهائيات في الصغر شبيهاً بنظام الأعداد الحقيقية. ولتوضيح ذلك، لنفرض  $M$  هو فضاء كلي-معياري و  $L$  اللغة الشكلية، فأية جملة في  $L$  عبارة عن فرضية في  $M$  قد تكون صادقة أو غير صادقة. بمعنى آخر أي جملة في  $L$  أما أن تكون صادقة أو نفيها صادق، فلتكن هذه الجملة  $K$  حيث تمثل جميع الجمل الصادقة ونطلق على  $M$  نموذج يخص  $K$ . أما  $M$  فهو البناء الرياضي الذي يحوي الجمل الصادقة التي تنتمي إلى  $K$ ، عندئذ يمكن أن نطلق على  $K$  كشيء معرف تماماً، وهناك أيضاً نماذج خاصة بـ  $K$  غير معيارية أي هناك بناءات رياضية أخرى تختلف تماماً عن  $M^*$  يرمز لها  $M$  وهي تعد أيضاً نماذج عن  $K$ .

هناك أعداد يطلق عليها الأعداد الفوق حقيقية أو ما بعد الحقيقية Hyperreals Numbers وهي التي تحتوي على الأعداد الحقيقية العادية (القياسية/المعيارية) وغير المعيارية، ويكون العدد  $x$  فوقحقيقي إذا كانت قيمته المطلقة أصغر من أي عدد حقيقي موجب معياري فليكن  $M$  وبالرموز  $x < M$  وعادة ما تكون  $x$  محصورة في الفترة  $[M.M^*]$  على الخط المستقيم.



كل عدد نهائي فوقحقيقي  $x$  هو مجاور (قريب جدا) العدد الحقيقي المعياري  $a$  مثلاً ولا يمكن لأي عدد فوقحقيقي أن يكون مجاوراً لعددین مختلفین ويكتب عادة  $x \approx a$ . فإن العدد الفوقحقيقي  $x$  و  $y$  هو  $x \approx y$  ويقال بأن  $x$  لانهائي في الصغر  $(\text{Std } x)=0$ .

و عندما عرف فيرشتراس مفهوم "النهاية" عام 1872 لم يستخدم الكميات المنتهية في الصغر ولكن الحقبة التي سببت انقلاباً في تاريخ تلك الكميات كان في عام 1960 أي ما يقارب ثلاثمائة سنة عندما وضع لينتزر أساسيات تلك الكميات وهكذا صدرت أعمال روبنسون حول التحليل الرياضي اللامعياري والذي اشتملت فيه البنية المنطقية للكميات المنتهية في الصغر منطلقاً من مفاهيم لينتزر.

تنطلق الأسس الليبيزية على أن المنتهية في الصغر Infinitesimal هو عدد صغيراً جداً من أي عدد موجب ولكنه أكبر من الصفر أما العدد المنتهية في الصغر السالب فهو أكبر من أي عدد سالب ولكنه أصغر من الصفر، فهذا التعريف يعود إلى لينتزر.

"كان أغلب الرياضيين ينظرون إلى اللامتناهيات في الصغر على أنها ليست سوى أوهام" و بالرغم من ذلك "وجدوا أنه يصعب تجنب اللامتناهيات في الصغر في مسار اكتشافاتهم وذلك مهما كان عدم استساغتهم لها نظرياً".

والغريب في الأمر فإن اللاهائيات هذه "تقع في الصنف غير المعياري" و "ما زالت تعتبر كينونات محيرة .. وليس من الواضح أن

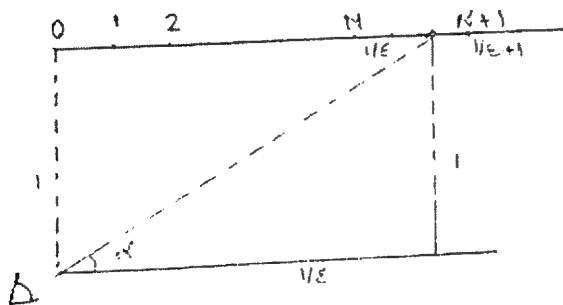


مثل هذه الصغائر موجود فعلا، و لكن الصحة المفاهيمية للنظرية قد تم اثباتها إلى درجة تكافئ ثقتنا المبررة بنظم رياضياتية أخرى" 3 .

لقد شهد القرن العشرون استخدامات رصينة لفكرة "النهاية" والتي يعبر عنها رياضيا  $\lim f(x)$  وهى الفكرة التي تعكس وجهة نظر النهاية باعتبارها قيمة متناهية، حيث نحصل على  $f$  عندما تقترب  $x$  إلى  $a$ .

هل جميع هذه الأعداد تكون مرئية ؟

لنتصور الآن مجالاً مكبراً (مجهرياً) سنجد أن جميع الأعداد المرئية في هذا المجال والتي تقترب إلى الصفر هي كميات متناهية في الصغر كما هو موضح في الشكل.



فالصفر نفسه هو كمية متناهية في الصغر بالإضافة إلى أعداد أخرى متناهية في الصغر، فسلوك هذه الكميات بوجه أدق يكون

<sup>3</sup> "حل مفارقات زينو"، مجلة العلوم .



عيانيا ( يمكن رؤيتها بالعين المجردة) و يمكن تطبيق عمليات الجمع والضرب، فمثلا، إذا كانت  $\varepsilon$  كمية متناهية في الصغر، فإن  $\varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$  أما بالنسبة إلى  $2 + \varepsilon$  فإنها تنطبق على العدد 2 نفسه ولكن المجال الجهري يركز على العدد 2 وتبدو لنا تلك الكمية مغايرة عن العدد 2. فالأعداد العيانية هي تلك الأعداد العادية المعروفة التي نداولها، كالأعداد الطبيعية مثلا، عندئذ يطلق عليها الأعداد المعيارية Standard فكل عدد معياري فليكن  $a$  تكون حوله أعداد لانهائية من نوع جديد تختلف عنه مجهريا وتنطبق عليه عيانيا، فمثلا العدد المعياري 2 فإن العدد اللامعياري له سيكون  $2 + \varepsilon$  حيث  $\varepsilon$  كمية متناهية في الصغر غير صفرية.

نحن في الواقع أمام صورتين الأولى مجهرية و الأخرى عيانية، فمثلا يمكن كتابة العدد 2 بالصورة العيانية هكذا  $2 = 2 + \varepsilon$  بينما الصورة المجهرية  $2 \neq 2 + \varepsilon$  و يفضل كتابتهما على التالي:  $2 \approx 2 + \varepsilon$  أي  $2 + \varepsilon$  عندما تقترب  $\varepsilon$  من 2.

ولكن  $2 + \varepsilon = 2$  أي لا يساوي 2 ، إلا إذا كانت  $\varepsilon$  كمية متناهية في الصغر وتكتب  $\varepsilon \equiv 0$  .

أما بالنسبة للقواعد الحسابية للكميات المتناهية في الصغر، فإنه بوسعنا أن نحصر القواعد الآتية: لنفرض  $\varepsilon$  كمية متناهية في الصغر ، غير صفرية أي  $\varepsilon \neq 0$  فإن تلك الكمية تحقق القواعد الآتية :

$$1. \quad \varepsilon + \varepsilon = \varepsilon$$

$$2. \quad \varepsilon \quad x \quad \text{عدد نهائي فوق حقيقي} = \varepsilon$$



$$3. \quad \infty = \infty + \infty \quad (\text{كلاهما موجبان أو سالبان})$$

$$4. \quad n + n = n \quad (n \text{ عدد نهائي } \infty)$$

$$5. \quad 1/\infty = \varepsilon \quad \text{و} \quad 1/\varepsilon = \infty$$

$$6. \quad 1/n \text{ عدد نهائي}$$

$$7. \quad \text{لا توجد قاعدة لخارج القسمة وكذلك } \sum \varepsilon \times n \text{ أو } \varepsilon \times \infty$$

وقبل أن نختتم هذا الفصل نريد القول على أن كانتور لم يكن شغله الشاغل محصوراً على الجانب النظري الصرف بل تجاوزه جاهداً وساعياً وراء التطبيقات العملية في الميادين الأخرى وبالذات عندما انصب اهتمامه في حقل الفيزياء الرياضية وهذا التوجه بمثابة الدافع الأساسي في أبحاثه، ففي عام 1883 في لقاء مع الرياضيين في مدينة فرايبورج صرح الآتي: "إن إحدى المسائل الهامة في نظرية المجموعات بل والجزء الأساسي كما اعتقد هو الذي تطرقت إليه في بحثي Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre الذي يحتوي على تحد لإيجاد الروابط المتنوعة أو قوى المجموعات الموجودة في الطبيعة (على الأقل تلك التي نعرفها أي في متناول خبرتنا)، حيث توصلت إلى تطوير المفهوم العام لترقيم Anzahl في المجموعات المرتبة تماماً، وبتعبير آخر الأعداد المرتبة".



## ملحق

بعض المفاهيم الأساسية الخاصة بنظرية المجموعات واللافهمائيات

المجموعة Set :

هي أي تجمع من الأشياء المتمايضة والمعرفة تعريفاً جيداً. وتسمى الأشياء المكونة للمجموعة بالعناصر.

المجموعة الخالية: Empty Set

هي مجموعة خالية من أي عنصر ويرمز لها بالرمز  $\phi$  أو  $\{ \}$ .

المجموعة الجزئية: Subset

إذا كان كل عنصر في المجموعة "A" هو عنصر في مجموعة أخرى B، فإنه يقال أن المجموعة A هي مجموعة جزئية من B وتكتب  $A \subseteq B$ .

المجموعة الشاملة: Universal Set

هي المجموعة التي تكون كل المجموعات جزئية فيها .

إذا كانت B, A مجموعتين فإن :

$A \cup B = \{x : x \in A \text{ أو } x \in B\}$  تسمى بخاصية الاتحاد Union

$A \cap B = \{x : x \in A \text{ و } x \in B\}$  تسمى بخاصية التقاطع Intersection

$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ و } x \notin B\}$  تسمى بخاصية الفرق Difference



## بديهية اللانهائية :

توجد هناك مجموعة  $x$  تحتوي علي مجموعة خالية، وكذلك  
إذا كانت  $y$  تنتمي للمجموعة  $x$ ، فإن اتحاد  $y$  و  $\{y\}$  ينتمي إلى  $x$ ،  
وتؤكد البديهية أيضا على وجود مجموعات لانهائية .

$$[\exists x: \phi, y \in x \& y \cup \{y\} \in x \exists \text{ Infinite set}]$$

## نهاية الدالة ( التابعة ) عند اللانهائية :

يقال للعدد  $L$  نهاية الدالة  $y = f(x)$  عندما تؤول  $x$  إلى

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$$

## تمثيل الأعداد الترتيبية بمجموعات :

لنفرض  $a$  هو العدد الترتيبي الذي يمكن أن يحدد بالمجموعة  $\{b : b < a\}$   
لجميع الأعداد الترتيبية التي تقل عن  $a$  .

$$0 = \{b; b < 0\} = \phi$$

$$1 = \{b : b < 1\} = \{0\} = \{\phi\}$$

$$2 = \{b : b < 2\} = \{0, 1\} = \{\phi, \{\phi\}\}$$

$$3 = \{b : b < 3\} = \{0, 1, 2\} = \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$$

.

.

.

$$\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\omega + 1 = \{0, 1, 2, \dots, \omega\}$$

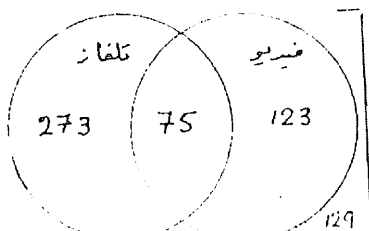
$$\omega + \omega = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots\}$$

$$\omega^2 = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \dots, \omega.2, \omega.2 + 1, \dots, \omega.3, \dots\}$$



## تطبيقات على المجموعات باستخدام شكل فن Venn diagram

مثال 1 : أجرى مسح على 600 أسرة , و تبين أن 348 أسرة تمتلك جهاز تلفاز و 198 تمتلك جهاز فيديو و 75 من يمتلك الاثنين معا .



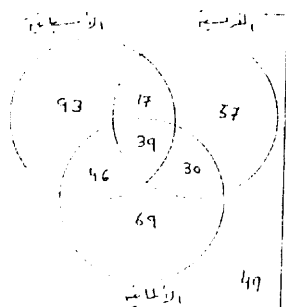
فكم عدد الأسر التي تمتلك :

1. أجهزة فيديو فقط.
2. أجهزة تلفاز فقط.
3. لا تلفاز و لا فيديو.

يمكن توضيح الإجابة في الشكل المقابل، حيث سيكون عدد

الأسر التي تمتلك جهاز التلفاز فقط 273 والتي تمتلك الفيديو 123 ولا أحدهما هو 129.

مثال 2: هناك 400 شخص تقدموا لوظائف مختلفة حسب احتياجات إحدى المؤسسات، واتضح بين هؤلاء من يجيد اللغات الآتية بالإضافة إلى اللغة الإنجليزية وهم كالتالي: 195 اللغة الإسبانية و 143 الفرنسية و 184 الألمانية و 56 الإسبانية والفرنسية و 8 الإسبانية والفرنسية و 69 الفرنسية و الألمانية. فكم عدد الأفراد الذين يجدون اللغات التالية من هؤلاء:



1. الإسبانية فقط.
2. الفرنسية فقط.
3. الإسبانية والفرنسية.
4. الفرنسية والألمانية.
5. الإنجليزية فقط.



## الإجابة:

سنجد 93 يجيدون الإسبانية و 57 يجيدون الفرنسية و 17 الاسبانية والفرنسية معا و 30 الفرنسية و الألمانية و 49 الإنجليزية فقط، كما هو موضح في الشكل أعلاه .

### فضاء نظرية المجموعات :

يمثل الشكل التصور القياسي البحث لفضاء نظرية المجموعات الذي يحتوى على جميع الأعداد الترتيبية بدءاً من العدم أو اللاشيء حتى اللانهائية المطلقة بصرف النظر عن وجودها الحقيقي :

$\omega = \aleph_0$  أول عدد ترتيبي أصلاي (يساوى مجموعة الأعداد الطبيعية  $N$ )

$\aleph_1$  : ثاني عدد لانهائي أصلاي و أول عدد ترتيبي غير قابل للعد

$\aleph_w$  أول عدد أصلاي تسبقه أعداد أصلاية لانهائية متعددة

$k$  أول عدد أصلاي حيث  $k = \aleph_k$  عدد كبير جداً أكبر مما يتصور .

$\Omega$  اللانهائية المطلقة يمكن أن يقبل و يعترف به كأحد اللانهائيات التي لا يمكن الوصول إليها ولكن لا يمكن معرفتها تقريبا على حد تعبير كانتور.

معظم الأبحاث والدراسات الجارية في نظرية المجموعات تحاول أن تسبر غور هذا المجال للتوصل إلى بدهيات تتعلق بالأعداد الأصلانية يكون لها دور فعال في هذا المجال.

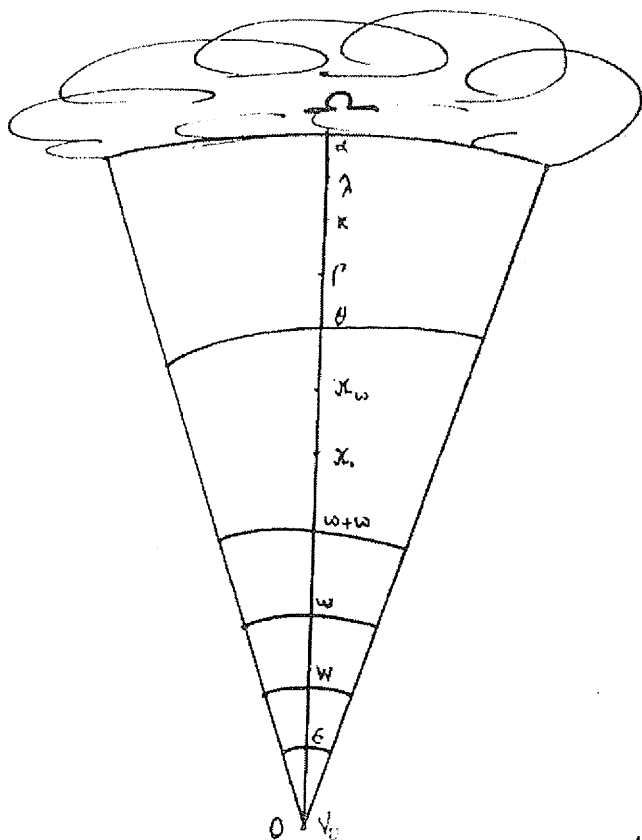


$V_B$ : فضاء نظرية المجموعات التقليدية.

$V_{w+w}$ : حيز الرياضيات العادية

$V_w$ : يحتوى هذا المجال على الأطر الممكنة.

$V_6$ : (جوجل).





## المحتويات

5	توطئة
11	الفصل الأول: تقديم - موجز حياة كانتور - خصوم كانتور
31	الفصل الثاني: مفهوم اللانهائية قبل كانتور
49	الفصل الثالث: اللانهائية عند كانتور
67	الفصل الرابع: اللانهائية بعد كانتور أو اللاكانتورية
	ملحق: بعض المفاهيم الأساسية الخاصة بنظرية
89	المجموعات واللانهائيات
95	المصادر



# المصادر

## أولاً: العربية

1. د. محمد ثابت الفندي: أصول المنطق الرياضى، دار النهضة العربية-بيروت 1984
2. د. محمد ثابت الفندي: فلسفة الرياضة، دار النهضة العربية - بيروت 1969
3. محمود محمد كتكت: نظرية المجموعات، دار الفرقان للنشر والتوزيع، عمان 1982
4. زلاتكاشبورير : الرياضيات في حياتنا، ترجمة د. فاطمة عبدالقادر سلسلة عالم المعرفة - الكويت 1987
5. د. محمد مهران: فلسفة برتراند رسل، دار المعارف ط2، القاهرة 1979
6. الشيخ كامل محمد محمد عويضة: زينون وما حققته الفلسفة اليونانية دار الكتب العلمية - بيروت 1994
7. حل مفارقات زينو، مجلة العلوم، المجلد 12 العدد 10، اكتوبر 1996



1. Alsiddiqi Abdullatif(1986): An Approach to the problem of the Infinite, Ph.D thesis, University of Poona-India
2. G.Cantor(1955): Contribution to the Founding of the Theory of Transfinite , Trans.Phiip Jourdain - Dover
3. I.Grattan-Guiness (1980): From the Calculus to Set Theory Ed Duckworth, Chapter 5: The development of Centurion Set Theory
4. Dauben Joseph Warren( 1990): G.Cantor His Mathematics and Philosophy of the infinite ,Princeton
5. Michael Hallett( 1986): Cantorian Set Theory and Limitation of Size , Oxford
6. Victor Harnik, Infinitesimals from Leibniz to Robinson The Mathematical Intelligencer Vol.8 No.2 1986
7. Paul J. Cohen & R. Hersh , Non-Cantorian Set Theory , Scientific American Dec 1987
8. Stewart Ian& Tall David (1987): The Foundation of Mathematics, Oxford
9. Davis Phiip&Hersh Reuben(1984): The Mathematical Experience ,Penguin books
10. Temple George(1981): 100 years of Mathematics , Duckworth
11. Kline Morris(1980): Mathematics,the loss of certainty, oxford 1980
12. Moore,A.W (1993): The Infinite , Routledge







الناشر



دار الشرق لـ

عمان - تلفون: ٦٢٤٣٢١

دار الشرق لـ

رام الله - القاهرة - الشارقة

ISBN 9657 - 07 - 038 - 1 (ارتداد)